当代学术思潮译丛 3

混沌

开创新科学

[美]詹姆斯·格莱克著



上海译文出版社

当代学术思潮译丛

混沌
开创新科学

● 〔美〕詹姆斯·格莱克 著

● 张淑誉 译　郝柏林 校

Jame Gleick

CHAOS

Making a New Science

Viking Penguin Inc ,New York

Twelfth Printing, April 1988

根据企鹅集团书金出版社 1988 年 4 月版译出

混　沌

开 创 新 科 学

〔美〕詹姆斯·格莱克著

张淑誉　译

郝柏林　校

上海译文出版社出版、发行

上海延安中路 955 弄 14 号

全国新华书店经销

吴县东山陆巷印刷厂 印刷

开本 850×1156　1/32　印张 11 3'5　插页 7　字数 238,000

1990 年 8 月第 1 版　1990 年 8 月第 1 次印刷

印数 0 001—7,000 册

ISBN7—5327—1049—1/B·063

定价 6 75 元

校者前言

气似质具而未相离谓之混沌。

——《易乾凿度》

混沌，这个在中外文化中渊流悠久的词儿，正在成为具有严格定义的科学概念，成为一门新科学的名字，它正在促使整个现代知识体系成为新科学。

混沌研究的进展，无疑是非线性科学最重要的成就之一。它正在消除对于统一的自然界的决定论和概率论两大对立描述体系间的鸿沟，使复杂系统的理论开始建立在“有限性”这更符合客观实际的基础之上。跨越学科界限，是混沌研究的重要特点。普适性、标度律、自相似性、分形几何学、符号动力学，重整化群等等概念和方法，正在超越原来数理学科的狭窄背景，走进化学、生物、地学，乃至

社会科学的广阔天地。越来越多的人认识到，这是相对论和量子力学问世以来，对人类整个知识体系的又一次巨大冲击。这也许是20世纪后半叶数理科学所做的意义最为深远的贡献。然而，这一切是怎样发生的？一批不知名的热中于“旁门左道”的人物，怎样成为新领域的先驱？格莱克的这本书以广大知识界读者为对象，对混沌科学的诞生和发展作了生动描述。

格莱克的这本书不是一本科学著作，而是一篇大型报告文学。它基于同大约200位科学家的谈话，写的都是真人真事。作为《纽约时报》的编辑和记者，他写出这样一本书是很不容易的。然而，作者的态度颇为严肃。原书后面附有24页小字排印的说明，给出了正文中几乎每一处重要观念或引文的出处。中文译本把这些说明中的一部分移入正文，省略掉那些只是为了承认版权或致谢的文字，但是保留了全部有明确出处的引文，以便读者进一步查阅。当然，外行人写科学难免有不确切之处，特别是在混沌这个尚未定型的领域。我们只在必要时加了少量的校注。译校者还加了一些脚注，以方便我国读者。我们把原索引改成了中英人名对照表，并加了一个简短的中英名词对照表，其中列举了一

批尚无固定译法或现有译法不妥的名词。

书中人物故事大多发生在美国，这当然与作者的环境有关。然而，混沌这桩跨学科、破传统的事业在欧洲孕育而在美国壮大，则决非偶然。我劝年轻的读者看一看第10章里描写的4位研究生，怎样在没有导师、没有经费的情况下，同其他地方的年长科学家一道成为新领域的开拓者。

愿我国科学工作者刻苦奋斗，在新领域里争一席之地。我们的工作远未达到“领导世界新潮流”的水平。这也是我国整个科学事业的现状。它不是哪一位科学工作者努力多少的问题，而是整个社会现实的反映。只有富有远见的科学政策，对基础研究的事实上而不是口头上的持续支持，才能改变这种状况，也才能使我国的工业技术走上独立发展的道路。在当前情况下，要特别警惕那种“伪科学”、“准科学”的学风，那些塞上几个新名词，没有任何严肃的数据和认真的分析，就以“现代”面貌出现的文章。混沌不是议论。这本书也不是科学著作。近20年来已经发表了不下5,000篇有关混沌的研究论文，近100部专著和文集。有志进入新领域的人，至少应当钻研其中一小部分，同时动手作实验（包括计算机实验）和进行数学分析。

译者和校者感谢丹·阿布拉姆逊和卢侃在英文疑难方面所给予的帮助，感谢陈以鸿先生为全书作了审订。

郝柏林

1989年春节

序于中国科学院理论物理研究所

目次

1 序曲

1974年，在新墨西哥州的小城洛斯阿拉莫斯，警察们曾一度担忧地注意到一位夜复一夜在后街上踱来踱去的男人，他燃着的烟头红点在黑暗中飘忽不定。借着透过高原稀薄空气散落下来的星光，他会无目的地漫步几个小时。并不只是警察们感到奇怪。在国家实验室里，一些物理学家也听说他们最近来的新同事正在做每天26小时的实验，这意味着他的作息时间表会慢慢地同其他人错开相位。甚至对理论部来说，这也近乎怪诞了。

自从奥本海默为着原子弹计划选中了这块世外的新墨西哥州土地以来，30年间，洛斯阿拉莫斯国家实验室已经展布在荒凉无垠的高原上。它设立了粒子加速器、气体激光器和化工厂，荟萃了数千名科学工作者、行政管理人员和技术人员，同时也是世界上超级计算机最集中的地方之一。一些老科学家们都还记得40年代在峭壁边急速架起的许多木质建筑，但是对今天大多数的洛斯阿拉莫斯成员，亦即那些穿着学生式灯芯绒裤子和工作衫的年轻男女来说，第一批原子弹制造者都只是一些幽灵而已。实验室纯抽象思维的焦点是理

论部，通称T部，正像计算部叫做C部，武器部叫做X部。100多位在T部工作的物理学家和数学家们，有良好的待遇和学术自由，没有人迫使他们去讲课和发表文章。这些科学家都有光辉而且怪僻的经历。很难有什么能使他们感到惊讶。

但费根鲍姆的情况非同寻常。在他的名下只发表过一篇文章，而且他没有去研究任何看起来会有出息的事情。他浓密的长发乱蓬蓬的，从宽宽的眉宇间往后梳去，就像那些德国作曲家的塑像一样。他的眼光急遽转换，充满激情。他说话总是很快，往往丢掉冠词和代词，仿佛有点中欧腔，其实他是个地道的布鲁克林[①]人。他工作时着魔似地干着。无法工作时，就散步和思考，不管是白天和夜晚，而夜晚是他最好的时光。一天24小时看来是太受限制了。然而他个人的准周期的实验还是停了下来，因为他发现无法再忍受每隔几天就要在日落时睡着。

他在29岁时已经成为出类拔萃的学者，一个专门的顾问，科学家们只要找得到他，会向他请教任何特别难解决的问题。有一天晚上他去工作的时候，实验室主任阿格纽正要离开。阿格纽是一个很有权力的人物，是当初奥本海默班子中的一员。他曾经坐在测量飞机里，陪同依诺拉·盖[②]飞临广岛上空，摄下了实验室第一件产品的投放过程。

阿格纽对费根鲍姆说："我知道你很聪明，既然如此，为什么不去解决激光聚变呢？"

甚至费根鲍姆的朋友们也怀疑他是否曾打算做一件自己

---

① Brooklyn，纽约的一个区。——译者

② Enola Gay，投掷第一颗原子弹的飞机名字。——译者

的工作。他很愿意就朋友们提出的问题即兴变魔术，但看来并没有兴趣把自己的研究集中到任何会得到报偿的问题上。他思考过液体和气体中的湍流。他思考过时间——它究竟是平滑地流逝还是像一串宇宙动画片那样跳跃？他思考过人眼有没有能力在宇宙中看见连贯的颜色和形状，而宇宙照物理学家们所知道的是变动不居的量子万花筒。他思考过云彩，有时从飞机舷窗中观察（直到 1975 年正式暂停他科学旅行的特权，理由是他滥用权利），有时从实验室后面的高山上眺望。

在西部山城的上空，云彩很少像东部那种煤灰般的低低的薄雾。在洛斯阿拉莫斯一个巨大的破火山口的背风面，滚滚的云彩弥漫天穹，形状似随机而又不随机，有时像剑锋般划一挺立，有时又排成规整的沟垄，犹如大脑图纹一般。在暴风雨来临的午后，天空随着闪电的即将到来而发光和颤抖，耸立在百里外的云墙渗透和反射着电光，直到整个天空开始呈现出壮观的景象，像是对物理学家们提出难以捉摸的非难。云彩代表了自然界的一方面，既模糊又细致，既有结构而又不可预言。这个方面是物理学的主流所未曾涉及的。费根鲍姆平静地、没有结果地思考着这类事物。

对一位物理学家来说，实现激光聚变是合情合理的问题；钻研微观粒子的自旋、“颜色”和“味道”是合情合理的问题；确定宇宙起源的年代也是合情合理的问题。理解云彩却是气象学家的事情。就像其他物理学家一样，费根鲍姆使用一种简短的“行话”来评价这些问题。他会说，“这种事是显然的”，指任何熟练的物理工作者通过适当思考和计算就能够理解的结果。“并非显然”，指的是那些赢得尊重和诺贝尔奖的工作。而对那些最艰难的问题，那些只有长期深入钻研宇宙

奥秘才能有所领悟的问题，物理学家们备用的词语则是“深刻”。在 1974 年，虽然只有少数同事们知道，费根鲍姆却是在研究一个“深刻”的问题：混沌。

混沌开始之处，经典科学就终止了。因为自从世界上有物理学家们探索自然规律以来，人们就特别忽略了无序，而它存在于大气中，海洋湍流中，野生动物种群数的涨落中，以及心脏和大脑的振动中。自然界的不规则方面，不连续和不稳定的方面，一直是科学的难题，或许更糟些，是无法理解的怪物。

但是在 70 年代，美国和欧洲的少数科学家开始找到了无序的门径。他们是数学家、物理学家、生物学家和化学家，他们都在寻求各种不同的不规则现象之间的联系。生理学家们在人类心脏生发出来的混沌中发现了令人惊奇的有序，这种混沌曾是无法解释的猝死的主要原因。生态学家们考察了舞毒蛾总数的升降。经济学家们发掘出陈旧的股票价格数据，并试用新的方法来分析。由此种种方面得到的启示，直接引入了自然界，包括对云彩的形状、闪电的径迹、微血管的缠结、星体形成银河星团的过程的认识。

当费根鲍姆在洛斯阿拉莫斯开始思考混沌的时候，他只是几个分散的大多互不相识的科学工作者中的一员。加州伯克利的一位数学家（斯梅尔）组织了一个小组对“动力系统”开展新的研究。普林斯顿大学的一位种群生物学家（梅）正准备发表一个热情的呼吁：所有的科学家都应当注意潜伏在一些简单模型中的令人惊奇的复杂行为。为国际商用机器公司工作的一位几何学家（曼德勃罗）正在寻找一个新

词来描述一族几何形状——犬牙交错，缠结纷乱，劈裂破碎，扭曲断裂——他认为这是自然界中的一个组织原则。一位法国数学物理学家（茹厄勒）刚刚作出一项有争议的断言，那就是流体中的湍流或许与一种他称为奇怪吸引子的稀奇古怪的无限缠结的抽象有某种关系。

10年之后，混沌已经成为一种迅速发展的运动的简称，而这个运动正在改变着整个科学建筑的结构。到处是混沌会议和混沌刊物。政府中那些负责军事机构、中央情报局和能源部的研究经费的官员，把不断增加的金钱投入混沌研究，并且为管理这种资助建立专门的机构。在每一所重要的大学和重要的共同研究中心，一些理论家们首先使自己同混沌结合起来，然后才结合到名义上的原有专业。在洛斯阿拉莫斯建立了一个非线性研究中心来协调混沌和有关问题的研究；全国各大学校园里都出现了类似的机构。

混沌创造了特殊的计算机使用技术和各种特殊的图象，于是抓住了复杂性背后的古怪而精致的结构。这门新科学产生了自己的语言，亦即分形和分岔，阵发和周期，叠毛巾微分同胚和光滑面条映象等等高雅的行话。这些是新的运动要素，正像在传统的物理学中，夸克和胶子是物质的新要素一样。对一些物理学家说来，混沌是过程的科学而不是状态的科学，是演化的科学而不是存在的科学。

现在这门科学正在举目四望，看来混沌无所不在。上升的香烟烟柱破碎成缭乱的旋涡。旗帜在风中前后飘拂。龙头滴水从稳定样式变成随机样式。混沌出现在天气行为中，出现在飞机飞翔中，出现在高速公路上阻塞的汽车的行为中，出现在地下管道的油流中。不管在什么介质中，这些行为都遵

从新发现的同样的定律。这种认识已经开始改变企业经理作保险决定的方式，改变天文学家看待太阳系的方式，改变政治理论家谈论紧张形势导致武装冲突的方式。

混沌打破了各门学科的界限。由于它是关于系统的整体性质的科学，它把思考者们从相距甚远的各个领域带到了一起。一位负责科学资金的海军官员对一批数学家、生物学家、物理学家和医生说，"15年前，科学正陷入专业化越来越细的危机。由于混沌，专业化的过程戏剧性地倒过来了。"混沌所提出的问题使科学上业已公认的工作方法失效。它强烈主张复杂系统有普适行为。第一批混沌理论家们，亦即使这门学科发动起来的那些人，具有共同的敏感性。他们注视着图样花纹，特别是那些同时在不同尺度上出现的图样花纹。他们对随机性和复杂性有特别的爱好，喜欢参差不齐的边缘和突然的跳跃。混沌的信徒们——他们有时自称是信徒，是皈依者，是福音传教士——思索决定论和自由意态，思索演化，思索有意识的智力的本质。他们感觉到，他们正在扭转科学中简化论的倾向，即只从系统的组成零件夸克、染色体或神经元来作分析的倾向。他们相信自己是在寻求整体。

新科学的最热情的鼓吹者们竟然宣称，20世纪的科学只有三件事将被记住：相对论、量子力学和混沌。他们主张，混沌是本世纪物理科学中第三次大革命。就像前两次革命一样，混沌割断了牛顿物理学的基本原则。如同一位物理学家所说："相对论排除了对绝对空间和时间的牛顿幻觉；量子论排除了对可控测量过程的牛顿迷梦；混沌则排除了拉普拉斯决定论的可预见性的狂想。"在这三大革命中，混沌革命适用于我们看得见、摸得到的世界，适用于和人自己同一尺度的对象。日

常经验和真实的世界图象成为合情合理的探究目标。人们长期有一种感觉，只是不常公开表露，即理论物理已经同人类对世界的直觉偏离太远。谁也不知道，这是富有成果的异端，还是直截了当的邪说。但是，有些认为物理学正走进死胡同的人，现在把混沌当作一条出路。

在物理学内部，混沌的研究是从一潭死水中产生的。在20世纪的大部分时间内，主流曾是粒子物理，它在更高更高的能量、更小更小的尺度和更短更短的时间范围内探索物质的构造模块。除粒子物理之外，就是关于自然界基本力和宇宙起源的理论。然而，还是有一些年轻的物理学家越来越不满足于这种最有声望的科学方向。科学的进展开始显得缓慢了，新粒子的命名无济于事，理论体系乱糟糟。随着混沌的到来，比较年轻的科学家们相信，他们正在看到整个物理学开始改变航向的端倪。他们觉得，这个领域已经被高能粒子和量子力学炫目的抽象概念支配得太久了。

身居剑桥大学牛顿讲座席位的宇宙学家霍金，1980年作了题为“理论物理看到尽头了吗?”的演讲。在对他的这门科学作估量时，霍金就物理学的大部分说了一番话：

“我们已经知道支配日常生活中我们所经历的每件事的物理规律。……现在要用庞大的设备和巨额的金钱来做我们不能预言其结果的实验，这件事本身就是对理论物理长足进步的称颂。”

然而霍金认识到，从粒子物理的角度理解自然规律，并没有回答如何把这些规律运用到任何哪怕是最简单的系统。在两个粒子环绕加速器赛跑后相撞的云雾室里，可预言性是一回事；而在洗澡水晃荡的简易浴缸里，或在地球天气中，或

在人类大脑里，那完全是另一回事。

霍金的物理学，在获得诺贝尔奖和争取大量金钱作试验方面很有效，常常被称为一场革命。有时人们觉得一切都在“大统一理论”或“万物的理论”的范围之内。除了宇宙史最初的瞬间以外，物理学已经追溯了能量和物质的发展过程。但是，战后的粒子物理是一场革命吗？或者它只是从爱因斯坦、玻尔以及相对论和量子力学的其他创始人所奠定的框架上刮下来一点肉？当然，物理学的成就，从原子弹到晶体管，改变了 20 世纪的面貌。然而，如果有什么要说，那就是粒子物理的范围变窄了。自从这个领域产生新的理论思想，改变了非专家们理解世界的方式以来，已经过去了两代人。

霍金所描述的物理学能够不回答关于自然界的某些最基本的问题而完成它的使命。生命是怎样开始的？湍流是什么？首先，在一个由熵支配的宇宙中，一切都无情地趋向更大的无序，怎样出现有序呢？同时，人们日常经历的许多对象，如流体和机械系统，在我们看来是很基本和普通的，从而使物理学家们自然倾向于假定它们已经被很好地理解。但实际并非如此。

当混沌革命走上正轨时，优秀的物理学家们觉得他们毫不为难地回到了与人同尺度的现象。他们不仅研究星系，还研究云彩。他们不仅在“克雷”[①]计算机上进行有成效的计算，还使用“麦金多施”[②]。重要的期刊把关于球在桌上弹跳的奇怪动力学的论文与量子物理的文章同时发表。现在人们看到

---

① Cray，一种超级计算机。——译者

② Macintosh，一种小型个人计算机。——译者

最简单的系统提出非常困难的可预见性问题。然而，有序也在这些系统中自发地出现——混沌和有序同在。只有一种新科学才能开始跨越这巨大的知识深渊，它的一岸是单个的对象——一个水分子，一个心脏组织细胞，一个神经元——的行为，而另一岸是成百万这种对象的行为。

观察一下瀑布下面两个并排流动的泡沫。你能猜到它们在瀑布顶上时距离有多近吗？什么也猜不到。就标准的物理学而言，上帝是满可以亲自把所有那些水分子藏到桌子下面并把它们搅混一番的。按照传统，当物理学家们看到了复杂的结果时，他们就寻找复杂的原因。当他们看到系统的输入和输出之间存在随机关系时，他们就认为必须人为地把随机性放进任何现实性的理论，办法是加上噪声或误差。现代混沌研究始自 60 年代，当时人们缓慢地意识到十分简单的数学方程能成为完全同瀑布一般猛烈的一些系统的模型。输入的微细差异可能很快成为输出的巨大差别——这种现象被称为“对初始条件的敏感依赖性”。例如在气象中，这就成了人们半开玩笑说的“蝴蝶效应”——今天在北京有一只蝴蝶扇动空气，可能改变下个月在纽约的风暴。

当混沌的探索者们开始回顾这门新科学的家谱时，他们发现许多来自过去的知识轨迹。但有一点颇为突出：对于那些带头进行这场革命的年轻的物理学家和数学家们，蝴蝶效应曾是一个出发点。

2 蝴蝶效应

物理学家们喜欢想，人们要做的全部事情就是说：这些是条件，下一步将发生什么？

——费曼

洛伦兹和他的玩具天气模型

阳光从永远不见云朵的天空直射下来。风从像玻璃一样光滑的地面上扫过。夜幕永远不会降临，春秋也不会更替。这里从来没有下过雨。这就是洛伦兹用他的新电子计算机模拟出来的天气，它缓慢而确定地变化着，经历着炎夏正午永恒的干热，就像整个世界变成了卡米洛①，或者成了加利福尼亚南部的一个特别平淡无奇的翻版。

透过窗户，洛伦兹能看到外面真实的天气，时而阵阵晨雾在麻省② 理工学院校园中飘过，时而从大西洋飘来的层层

低云在屋顶上游荡。但是在他的计算机模型里，既没有雾也没有云。这是一台皇家麦克比（Royal McBee）型计算机，它由大堆电线和真空管组成，占据着洛伦兹办公室里难看的一角，发出令人心烦的噪声，而且几乎每一星期都要出故障。它的速度和存储都不足以对地球大气和海洋进行真正的模拟。然而洛伦兹毕竟在1960年制造出了自己的“玩具天气”，使同事们感到迷惑。计算机每一分钟在纸上印出一行数字，表明又过去了一天。如果你知道怎样阅读打印结果，你就会看到西风忽而转向北方，忽而转向南方，随后又转向北方。在这理想化的地球周围，数字化的气旋缓慢地转动着。随着消息在系里传开，其他的气象学家和研究生们有时聚到一起，就洛伦兹的天气下一步会出现什么花样而打赌辩论。不知为什么，同样的情形从来也没有重复出现过。

洛伦兹喜欢天气——这当然不是成为一名气象学研究者的先决条件。他体味着天气的变化多端。他欣赏大气中来而复往的模式，欣赏那些总是遵从数学规律但又永不简单地重复的涡流和气旋族。他仰望浮云时，感到看见了某种结构。有一次他甚至担心，研究天气这门科学，就像不用螺丝刀而想揭开玩具盒的盖子一样。现在他怀疑科学研究到底能否弄清奥秘。天气这玩意儿不是靠谈论平均值就能说清楚的。麻省坎布里奇③6月份的平均气温是华氏75度。沙特阿拉伯的首

① Camelot，传说中亚瑟王宫廷所在地，那里每个白天都充满阳光，每天夜里下雨。——译者

② Massachusetts，即马萨诸塞州。——译者

③ Cambridge，当地华人称康桥，以区别于英国剑桥。——译者

都利雅得一年中平均有10个雨天。这些是统计结果。更重要的是大气中各种模式随时间变化的方式，而这正是洛伦兹在计算机上要捕捉的东西。

洛伦兹是这计算机宇宙中的上帝，他可以自由地选择他所喜欢的自然规律。经过一系列平凡的试错过程后，他选取了12个规律。这是一些数字规律，即表示温度与气压关系或者气压与风速关系的方程。洛伦兹理解自己正在把牛顿的定律付诸实现。这些定律乃是像钟表匠一样的上帝手中的工具；他能创造一个世界，并且让它永远转动下去。由于物理定律的决定性，世界只要转起来就不必进一步干预了。建立这些模型的人们认为有一件事是当然的，即从现在到将来，运动定律总是实现数学必然性的桥梁。理解了这些定律，你就理解了宇宙。在计算机上模拟天气，正是基于这种哲学。

确实，如果18世纪的哲学家们设想他们的造物主是好心的不干涉主义者，满足于居身幕后，那他们设想的就是洛伦兹这样的人。洛伦兹属于一类特别的气象学家。他的面孔像饱经风霜的美国老农，然而眼睛又是出奇地有神，使他看起来好像总是在笑。他很少谈论自己或自己的工作，只是倾听别人讲话。他经常在他的同事们认为遥不可及的计算或梦想王国中留连忘返。最接近洛伦兹的朋友们觉得他好像在遥远的外层空间里耗去了大部分时日。

他在童年时就是个天气迷，至少他在双亲位于康涅狄格西哈特福德的房子外面密切注视逐日记录最高和最低气温的温度计这件事可资说明。但他在室内花费在数学难题书籍上的时间比观察温度计更多。有时他和父亲一道求解难题。有一天他们遇到了一个特别困难的问题，它实际上是不可解的。

父亲对他解释说：这是允许的，证明没有解存在也是解题的一种途径。洛伦兹喜欢这一点，就像他喜欢数学的纯粹性一样。于是他 1938 年从达特茅斯大学本科毕业时，觉得数学就是自己的职业。然而第二次世界大战改变了一切，他成了一名空军气象预报员。战后他决定继续留在气象界，从事理论研究，并推动数学稍往前进。他由于发表对正统问题如大气环流的研究论文而享有名声。同时他还在继续思考预报问题。

对于多数严肃的气象学家说来，天气预报还称不上科学。这是由技术员们从事的一种“感官”职业，他们只需要一些直觉地从仪器和云彩中看出明日天气如何的能力。这其实是猜想。在麻省理工学院这样的研究中心，气象学着重于那些有解的问题。洛伦兹和别人一样地深知天气预报工作的混乱，因为他自己就曾为空军飞行员的利益而身体力行过。但是他保持了对这一问题的兴趣——一种数学兴趣。

不仅气象学家们瞧不起天气预报，在 60 年代，实际上所有严肃的科学家都不相信计算机。这些弄得很花哨的计算器不大像理论科学的工具。于是数值天气模拟成了个不登大雅之堂的问题。然而，时机已经成熟。天气预报已经等待了 200 年，等待着出现可以把成千上万次硬算不断重复的设备。只有计算机才能使牛顿的希望兑现，即世界沿着决定性的道路展开，就像行星一样地遵守规律，像日月食和潮汐那样可以预言。从理论上说，计算机应当使气象学家们能够做从前天文学家们用铅笔和计算尺所做的事情：从宇宙的初始条件和指导宇宙演化的物理规律出发，计算宇宙的未来。描述空气和水运动的方程就像描述行星运动的方程一样为人所熟知。对于处理九个行星、几十个卫星和几千个小行星互相吸引的

太阳系，天文学家们没有而且永远不能达到完美的地步，然而行星运动的精确计算使人们忘记了这也是一种预报。当一位天文学家宣布说："哈雷彗星将在76年后回归"，这看起来像是事实，而不像预言。决定论的数值预报精密地刻划出宇宙飞船和导弹的路线。为什么对于风云雷电不能如法炮制呢？

天气确实更加复杂无比，但它毕竟由同一些定律管着。也许足够强大的一台计算机就可以成为拉普拉斯曾经设想过的最高智能，这位18世纪的哲学家兼数学家曾经比其他任何人更加染上了牛顿热。他写道："这样的智能，将用同样一个公式囊括大至宇宙中最重天体，小至最轻原子的运动；对于它说来，再没有什么不确定的东西；未来和过去同样在它眼前。"在有了爱因斯坦相对论和海森堡测不准原理的今天，拉普拉斯的乐观几乎像丑角的道白。然而，现代科学的许多部分确曾追求过他的梦想。无疑，20世纪的许多科学家——生物学家、精神病学家、经济学家——的使命就是把他们身边的宇宙分割成最简单的原子，这些原子将遵从科学规律。在所有这些学科中，一种牛顿式的决定论是必须用到的。现代计算技术的先驱者们的头脑中总是充满着拉普拉斯的思想；自从50年代冯·诺伊曼在新泽西州的普林斯顿高等研究所设计了第一批计算机以来，计算和预报的历史就总是交织在一起。冯·诺伊曼认识到天气模拟可能是计算机的理想任务。

然而这里总要作一点小小的妥协。它小得使许多实干的科学家忘记了它的存在；它像一张没有付钱的账单一样潜藏在他们的哲学的一个角落里。测量永远不可能是完善的。在牛顿的旗帜下前进的科学家们，事实上还挥舞着另外一面旗帜，上面写着：只要近似地知道了一个系统的初始条件和理

解了自然规律，就可以计算系统的近似行为。这一假定其实存在于科学的哲学核心里。就像一位理论家喜欢对学生们讲的："西方科学的基本思想是，当你试图解释地球表面一张台球桌上一个球的运动时，完全不必考虑另一个星系里某个行星上一片树叶的飘落。极小的影响是可以忽略的。事物的行动方式有一种收敛性，任意小的影响是不会放大成为任意大的效果的。"从经典科学的角度讲，近似和收敛的信念是很有根据的。它确曾起过作用。1910年确定哈雷彗星位置时的小小误差，只会对预告它在1986年的回归产生小小误差。对于今后几百万年，这一误差也永远是很小的。计算机为宇宙飞船导航时也遵从同一假定，近似准确的输入导致近似准确的输出。经济预报家也遵守这一假定，虽然他们的成就不大显著。全球天气预报的先驱者们也是这样做的。

洛伦兹在他简陋的计算机上，把天气简化到只剩下骨头架子。但是，随着洛伦兹的打印机一行一行地输出，那风和温度的行为看起来真有点像在地球上的样子。它们与洛伦兹心目中对天气的直觉是一致的，如他想象的那样自我重复，随着时间的变化显示出似曾相识的模式，气压时升时降，气流忽南忽北。他发现如果一行输出中只是由高降低，而没有簸动，那末下一次就会出现加倍的簸动。洛伦兹说："这就是预报员们可以使用的那类规律。"然而，情况的重复总是不那么准确的。这里既有一定模式，又有扰动。这是一种有规则的无序。

为了便于看到这些模式，洛伦兹创造了一套简陋的绘图法。他不让计算机像通常那样输出一行行数码，而是先印出一批空格，然后印出一个字母a。他选取一个变量，例如气流

的方向，令 a 的位置正比于角度。这样，随着纸卷转动，a 就前后摆动着往前进，绘出一条波动的曲线，给出一长串波峰和波谷，它们代表了西风在大陆上往南或往北偏转的历程。那种前面提到过的有规则性，那种一再出现但又永远没有两次完全相同的可以看得见的循环，对洛伦兹具有催眠术似的诱惑力，使他着迷得如醉如痴。整个系统像是在对预报员慢慢透露出自己的秘密。

1961 年冬季的一天，为了考察一条更长的序列，洛伦兹走了一条捷径。他没有令整个计算从头运行，而是从中途开始。作为计算的初值，他直接打入了上一次的输出结果。然后他穿过大厅下楼，清静地去喝一杯咖啡。一个小时之后他回来时，看到了出乎意料的事，就是这件事播下了一门新科学的种子。

计算机行为失常

这一轮新的计算原来应当准确地重复老结果。是洛伦兹本人把上次的中间结果输进去的。程序也没有改动过。然而当他瞧见新的输出结果时，他发现天气变化同上一次的模式迅速偏离，不到几个“月”时间，相似性完全消失了。他看看这组数字，瞧瞧那组数字，即使随机地取两组天气来，结果也不过如此。洛伦兹的第一个念头是：又坏了一只真空管。

突然间他明白了。计算机没有出毛病。问题出在他打进去的那些数字上。在计算机的存储中，每个数保持 6 位十进制值，例如 0.506127。输出时为了节省空间，只打印三位：0.506。洛伦兹输入的是这些较短的经过 4 舍 5 入的数字，他

假定这 1/1,000 的误差不会有什么影响。

这是个合理的假定。如果气象卫星能以 1/1,000 的精确度测定洋面温度，操作人员就会认为运气不错了。洛伦兹的皇家麦克比计算机上实现的是经典的程序。它使用一组纯决定论的方程。给出一个特定的起点，天气每一次都应当准确地按同一种方式发展。给出一个稍有不同的起点，天气的发展也应当稍有不同。小小的数值误差不过相当于一阵小风，自然会自行消失或互相抵消，而不致改变任何重要的大范围的天气特点。然而在洛伦兹的这一特定的方程组中，小误差却引起了灾难性的后果。①

于是洛伦兹决定更仔细地观察一下，两次几乎相同的天气模拟是怎样分道扬镳的。他把一条输出曲线摹绘到透明纸上，再覆盖到另一条曲线上，看看它们是怎样彼此分开的。先是两个连细节都相同的鼓包。然后一条曲线显现出有一丝落后。当达到下一个鼓包时，两条曲线的相位已经明显不一致了。到第三或第四个鼓包，所有的相似之处都已消失无遗。

这只是笨重的计算机显得不稳定而已。洛伦兹可以假定他的计算机或是具体模型出了一点毛病——也许他本应作出这样的假定。似乎不是种豆得瓜。可是从数学直觉出发，洛伦兹心里为之一震：某种东西在哲学上脱了节。这种直觉，他的同事们到很久以后才明白。他怀疑实际输入可能不稳定。虽然他的方程组只是地球天气的粗略模拟，但他确信还是抓住了实际大气的本质。就在这第一天，洛伦兹认定长期天气预

① 在所有思考过动力系统的经典物理学家和数学家中，庞加莱最好地理解了出现混沌的可能性。请参看庞加莱在《科学与方法》一书中的论述。

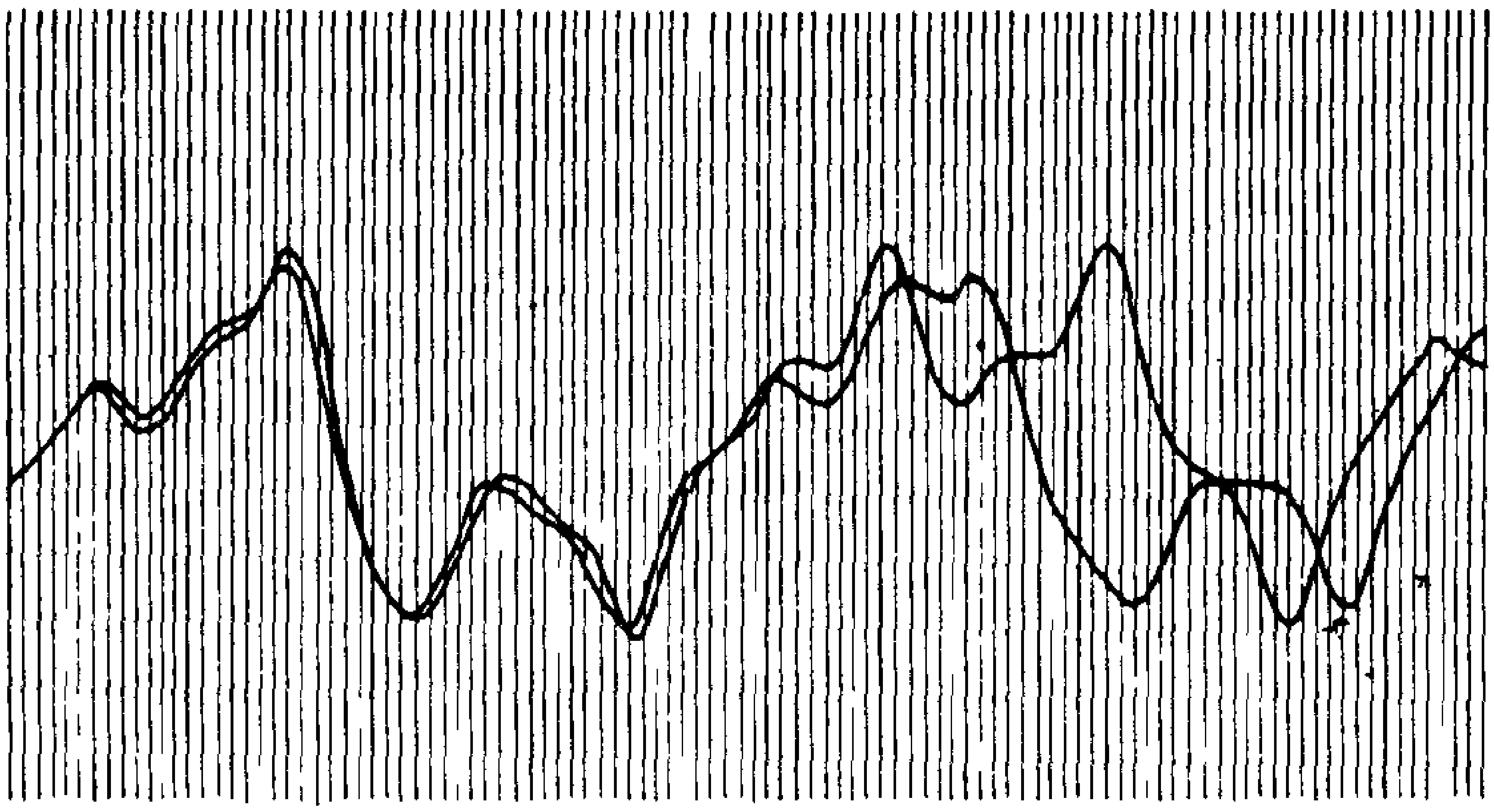


图 2 1　两组天气模式是怎样分道扬镳的

从几乎相同的出发点开始，洛伦兹看到他的计算机产生的天气模式差别愈来愈大，终至毫无相似之处。(此图取自洛伦兹 1961 年的打印结果。)

报注定要失败。

他说："不论怎么做，我们确实始终没有成功过；可现在总算有了为自己辩解的理由。我想，人们认为可能如此提前作预报的原因之一，就在于的确存在着一些物理现象，对于这些现象，人们能出色地实现预报，例如日月食，尽管太阳、月亮和地球的动力学是相当复杂的，又例如海洋潮汐。我从来根本不认为潮汐预报是一种预报——我认为这只不过是陈述事实。当然，人们总还是在预报着。潮汐实际上同大气一样复杂。两者都含有周期成分——你可以预报明夏将比今冬温暖。但是就天气而言，冬冷夏热乃是已知事实。就潮汐而言，我们关心的恰是可以预报的那一部分，而不可预报部分

比较小，除非有风暴来临。

“一位普通人看到我们可以提前几个月很好地预报潮汐，就会问为什么对大气不能如法炮制；两者只不过是不同的流体，运动规律大致是同样复杂的。但我认识到，任何具有非周期行为的物理系统，将是不可预报的。”

长期预报注定失败

50年代和60年代对于大气预报曾经有过不现实的乐观主义。报纸杂志充满了对气象科学的希望，不仅是预报，还要改变和控制天气。有两项技术同时成熟起来：数字计算机和空间卫星。于是准备了一项国际合作计划来充分利用这些新技术，这就是“全球大气研究计划”。有过这么一种想法，就是人类社会将会从天气的折磨下解脱出来，从天气的牺牲品变成它的主人。田野里将矗立着测量铁塔。飞机将在空中耕云播雨。科学家们将学会造雨和止雨。

这种流行观念的精神之父是冯·诺伊曼，他在建造第一台计算机的同时就有控制天气等明确意图。他游说于气象学家之间，并对物理学界就自己的计划发表令人神往的演说。对于这种乐观主义，他有特别的数学理由。他认识到，复杂的动力系统可能具有不稳定点。这是一些临界点，在那里稍稍一推就会有严重后果，就像一只球平衡在山顶尖端一样。当计算机造好并开始运行之际，冯·诺伊曼曾设想科学家们在此后几天之内就可以计算流体运动的方程。那时由气象学家们组成的中心委员会就会派飞机去施放烟幕或者在云中降雨，把天气推向预期的模式。但是冯·诺伊曼忽视了混沌的

可能性，即每一点都出现不稳定性。

到了80年代，已经有一个规模大而费用高的官僚机构专门从事于实现冯·诺伊曼提出的使命，至少是实现它的预报部分。离华盛顿环形公路不远，在马里兰郊区一座其貌不扬的方形建筑物中，美国的第一流预报员们在工作着，他们在屋顶上装着一套侦察用的雷达和天线。他们的超级计算机中所用的模型，只是在基本精神上与洛伦兹的模型有些相似。皇家麦克比机器当年每秒钟只能实现60次乘法，而赛伯[①] CD205型计算机，却以每秒100万次浮点运算作为计量速度的单位。洛伦兹当时能处理12个方程就很满意了，而今全球模型计算着50万个方程的方程组。这样的模型已经计入了空气凝聚和蒸发时，水分是怎样传入和传出热量的。数值风感受到数值山脉的地形。每一小时，从全球各个国家，从飞机、卫星和观测船只上都有数据流入。美国国家气象中心作出的预报之准确在全世界居第二位。

最佳预报来自英国的雷丁，一座从伦敦驱车一小时可达的小小的大学城。欧洲中期天气预报中心就设置在这里。它占据着树荫丛中具有典型联合国风格的一座不甚起眼的建筑。现代化的砖和玻璃结构，被来自许多国家的礼物装饰着。它是在全欧共同市场精神的全盛时期建立的，当时西欧大多数国家决定倾聚其人才物力于天气预报事业。欧洲人的成功归功于他们有年轻而流动的班底，没有政府机构的干预，再加上他们的克雷超级计算机总比美国同行们超前一个型号。

天气预报只是用计算机模拟复杂系统这一事业的开始而

① Cyber，一种超级计算机。——译者

决不是终点。同一技术也服务于各行各业的数理科学和社会科学工作者，他们希望能预报一切事物，小至喷气发动机设计师们关心的小尺度气流，大至经济学家们瞩目的广泛的金融流动。确实，到了70和80年代，计算机经济预报看起来真像全球天气预报。这些模型把复杂的、在某种程度上任意的方程组搅在一起，目的在于把初值（气压或者通货供应量）计量变成对未来发展趋势的模拟。程序员们希望计算结果不会因为许多不可避免的简化假定而失真太多。如果某个模型给出了显然过于离谱的结果——让洪水淹没了撒哈拉沙漠或者把利率提高了三倍，程序员就会修改方程组，使输出回到与预期相符的方向。实际上许多计量经济模型对于未来的结果是极其盲目的，然而不少本来应当知道得更多的人看来却很相信这些结果。人们发布经济增长或失业率的预报时，往往精确到两三位小数。政府和经济机构为这种预报付款并按它们行动，这可能是不得不如此，或者是没有更好的办法了。他们很可能知道，像“消费者的乐观程度”这样的变量，并不像“湿度”那么好测量，而且描述政治运动或者时装款式的完美的微分方程还根本没有人写出来过。但是很少人知道在计算机上模拟流动这一过程本身就是很脆弱的，甚至于当数据相当可靠而且遵守纯物理定律时，就像气象预报那样，情况也是如此。

计算机模拟确实成功地把气象事业从艺术变成了科学。欧洲气象中心的估计表明，这些在统计上聊胜于无的预报还是使全世界每年节约了几十亿美元。然而世界上最好的长于两三天的预报也仅仅是推测而已，超过6天或7天的预报则毫无价值。

原因就在于蝴蝶效应[1]。就小范围天气而言，任何预报都很快走样。而对于全球预报员来说，雷雨和暴风雪也算是小范围的事。各种误差和不确定性积累起来，经过一串湍流式的逐级放大，从尘旋风和小暴风发展成跨越整个大陆而只能从人造卫星上观察全貌的旋涡。

现代天气模型使用间距约为60英里[2]的网格。虽然如此，有些初始数据还是得凭猜测。这是因为地面观测站和气象卫星不能处处都监测到。然而，让我们假定用间距1英尺[3]的传感器覆盖地球表面，而且每1英尺一格地升高到大气顶层。假定每个传感器给出完全精确的温度、压力、湿度以及气象学家们需要的任何其他量的读数。准确地从正午开始，一台具有无穷能力的计算机读入全部数据，并计算12时01分，12时02分，12时03分等时刻在每一地点将发生的情形。

这样的计算机仍然不能预言一个月以后的某一天，新泽西州的普林斯顿市是天晴还是下雨。在正午开始计算时，计算机就不知道那些藏在传感器之间的空隙里的涨落，即与平均值的小小偏离。到了12时01分，这些涨落已经在1英尺外造成了不大的误差。很快这些误差就要成倍地增长到10英尺的尺度，乃至达到全球尺度。

甚至于对富有经验的气象学家，上面的说法也是与直觉相违的。洛伦兹的一位老朋友叫怀特，当时也是麻省理工学

---

① 洛伦兹最初用的是海燕的形象。“蝴蝶”可能来自他1979年12月29日在华盛顿的美国科学促进会的演讲：“可预言性：一只蝴蝶在巴西扇动翅膀会在得克萨斯引起龙卷风吗？”

② 1英里=1 609公里。—— 译者

③ 1英尺=0 3048米。—— 译者

院气象系的同事，后来做了美国国家海洋和大气署的主任。洛伦兹对他讲了蝴蝶效应和自己认为它对于长期预报的意义。怀特用冯·诺伊曼的话回答说：“预报算不了什么，重要的是控制天气。”他的想法是，这些完全在人所能及的范围内的小小改变，可以导致所希望的大尺度变化。

洛伦兹的看法不同。是的，人们可以改变天气。你可以使天气变得与本应发生的情形有所不同。然而如果你这样做了，你就永远也无法知道本来会怎样，这就好像把已经洗好的牌再洗一遍，你知道这会改变运气，但不知是变好还是变坏。

有序扮成随机

洛伦兹的发现属于偶然。它可以一直追溯到阿基米德在澡盆中的发现。但洛伦兹不是高喊“我发现了”的那一类人物。意外的发现只是使他仍在沿着原来的思路前进。他准备揭示这一发现的种种后果，办法是研究清楚它对于科学如何认识各种流体运动究竟有多少启示。

假如他在蝴蝶效应上止步不前，使可预言性让位于纯粹的随机性，那洛伦兹只不过是制造了一则坏消息。然而洛伦兹在自己的天气模型中看到了比随机性更多的内在东西。他看到了一种细致的几何结构，看见有序化装成随机。说到底，他本人就是一位穿着气象学家外衣的数学家，现在他必须开始过一种双重生活。他得写一些纯粹关于气象学的论文，同时还要写纯数学论文，只是在引言中加一些容易引起误解的关于天气的议论。最终他连这样的引言也不加了。

他把注意力越来越多地转向那些永远达不到定态的系统

的数学，这些系统的行为像是在自我重复但又不尽然。任何人都知道天气就是这样的非周期的系统。自然界中充满了其他例子：动物种群数几乎有规则地涨落着，传染病的来临和消退也具有逗人的近似规律。如果天气有那么一次精确地回到过去有过的状态，每一阵风和每一朵云彩都同原来一样，那它此后就可能永远重复原有过程，天气预报就会变成极其平凡的事情。

洛伦兹看到，在天气的不愿意自我重复和预报员的无能为力之间必定有某种联系，即非周期性与不可预言性之间的联系。要想写出简单的方程组来产生洛伦兹所寻求的非周期性是不容易的。最初他的计算机倾向于“锁定”在不断重复的循环上。但是洛伦兹尝试了种种不算大的复杂化，最终他获得了成功。办法是增加了一个方程，它改变了从东向西的加热量，在现实世界中这对应着太阳对例如北美东海岸和大西洋的加热方式之间的变化。计算结果不再重复了。

蝴蝶效应不是偶然，而是必然。洛伦兹的论据是：假定小扰动始终很小，不会在整个系统中逐级放大，那末天气只要有一次任意靠近过去经过的某个状态，它就会一直任意靠近随后的模式。就实际需要而言，这样的循环是可以预报的，因而不是令人感兴趣的。为了产生地球上如此丰富多彩的实际天气变化，可能想不出比蝴蝶效应更好的机制了。

蝴蝶效应后来获得了一个术语：对初始条件的敏感依赖性。对初始条件的敏感依赖性不是什么全新概念。一首民谣中早就唱过：

钉子缺，蹄铁卸；

蹄铁卸，战马蹶；
战马蹶，骑士绝；
骑士绝，战事折；
战事折，国家灭。①

在科学中，如同在生活里，人们知道一串事件往往具有一个临界点，那里小小的变化也会放大。然而，混沌却意味着这种临界点比比皆是。它们无孔不入，无时不在。在天气这样的系统中，对初始条件的敏感依赖性乃是各种大小尺度的运动互相纠缠所不能逃避的后果。

洛伦兹居然在自己的玩具似的天气模型中模拟出非周期性和对初始条件的敏感依赖性，这使他的同事们感到惊奇。这个模型包含 12 个方程，它们以无情的机械效率一次次被反复计算。从这样一个简单的决定论系统中，怎样能得出如此丰富、如此不可预言、如此混沌的结果呢？

非线性的世界

洛伦兹把天气放到一边，去寻求能得出这个复杂行为的更简单的方法。他在一个只有 3 个方程的系统中找到了一个方法②。这些方程是非线性的，也就是说，它们代表着并非严格成比例的关系。线性关系在作图时表现为一条直线。线

① 这是维纳引用过的民谣，见麻省理工学院 1981 年出版的《维纳全集》第 3 卷第 371 页。

② 这个方程组来自耶鲁大学萨尔茨曼的一组 7 个方程。

性关系是容易想象的：越多越好。线性方程总是可以求解的，因而便于在教科书中讲述。线性方程具有一种重要的叠加特性：可以把它们分开，再把它们合并，各个小块又浑然成为一体。

非线性系统一般说来是不可解的，也是不能叠加的。在流体系统和力学系统中，为了获得良好而简单的理解，人们往往把非线性项，例如摩擦力①，放到一旁不管。忽略摩擦力之后，可以用一个简单的线性方程来描述加速一个冰球所需的能量。计入摩擦力之后，情况变得复杂起来，因为所需能量随着冰球已有的运动速度而改变。非线性意味着游戏本身就包括了改变游戏规则的方法。人们不能对摩擦力赋予一成不变的重要性，因为它的重要性依赖于速度。而速度又反过来依赖于摩擦力。这种交错变化使得非线性很难计算，但又导致了线性系统中不可能发生的丰富多样的行为。在流体力学中，一切因素都归结到一个典型方程——纳维叶-斯托克斯方程。它真像奇迹一样简洁：把流体的速度、压力、密度和黏滞性全联系在一起了，然而方程却成了非线性的。因而，这种联系的本质反倒常常不可能控制。分析纳维叶-斯托克斯方程这样的非线性方程的行为，就像在一种特殊的迷宫中行走一样，你每迈出一步，迷宫的墙就自动改组一次。正如冯·诺伊曼本人所指出的："在一切方面方程的性质都同时变化着，方程的阶和次都在变化着。因此，出现令人头痛的数学困难就在意料之中。"只要纳维叶-斯托克斯方程不含有非线性项这个捣乱鬼，世界就会是另一个样子，科学也用不到混沌。

① 此处原文不确切。摩擦力通常可以作为线性项计入。——校者

洛伦兹的 3 个方程源于一类特殊的流体运动：受热气体或流体的上升运动，也称作对流。在大气中，对流搅动被太阳烤热的地表附近的空气，也使得柏油路面和暖气散热片附近的空气幽幽闪闪地向上运动。洛伦兹在谈起一杯热咖啡中的对流时，也是同样兴奋。正如他所指出的，这也是宇宙中不胜枚举的、我们希望能预报其未来行为的流体力学过程之一。我们怎样计算一杯咖啡会多快冷却下来呢？如果咖啡只是温的，它的热量也会耗散，但根本不引起流体运动。咖啡处于一种定态。然而，如果它足够烫，那末对流就会把杯底的热咖啡翻腾到较凉的表面上来。只要在咖啡中加一点奶油，这种对流就清晰可见。那些旋涡会相当复杂。但是这样一个系统的长期归宿也是显然的。由于热量散失，也由于摩擦使流体运动变慢，这种运动最终必定要停止下来。洛伦兹在一次科学家的聚会上冷冷地说："要想预报这杯咖啡一分钟之后的温度，我们可能遇到困难，但要预报一个小时以后的情形却轻而易举。"描述一杯冷却中的咖啡的运动方程，应当能反映这一系统的归宿。这些方程必须包含耗散。温度必定趋向室温，而速度必定趋向零。

洛伦兹拿来一组对流方程，把它们简化到只剩下骨架。他抛弃了一切可能是外在的因素，使事情简单到超现实的地步。除了非线性之外，原来模型中几乎什么也没有剩下来。对于物理学家们，这样的方程看起来很容易。只要瞧一眼，你就会说可以把它解出来——在以后许多年里，不少科学家们也真这样尝试过。

洛伦兹冷静地说："是的，当你才看到这些方程时，是倾向于这么想的。方程里面确实有一些非线性项，但是人们会

觉得有办法绕开它们。然而这是做不到的。”

教科书中最简单的一类对流，发生在装有流体的盒子中，盒底和盒顶都是平滑的，底面可以加热，顶面可以冷却。热底与冷顶之间的温差控制着流动。如果温差很小，整个系统静止不动。热量借助热传导而由底及顶，就像经过一根金属棒一样，无需克服流体保持静止的自然趋势。而且这一系统是稳定的。任何可能发生的随机运动，例如某位研究生敲了一下实验设备所引起的，都会逐渐消失，使系统回到定态。

然而，继续加热就会发生一种新现象。液体下部由于受热而膨胀。膨胀使得密度降低。密度降低使它变轻，轻到足以克服摩擦力而推向表面。在精心设计的盒子中，只发展出一个柱状圆卷，较热的流体沿着一边上升，而较冷的流体沿着另一边下沉。从侧面观察，流体的运动形成连续的圆圈。在实验室外面，大自然也经常形成自己的对流图案。例如，当太阳烤热沙漠表面时，转动的气流可以在上层的云团中或下面的沙层里形成影子般的图案。

更进一步地加热时，运动行为变得更复杂。这些圆卷开始晃动。对于模拟这类复杂性，洛伦兹的简化方程就显得过分简单了。它们只抓住了现实世界中对流的一种特性，即被加热的流体上升并旋转的圆周运动，就像费里斯转轮①一样。这些方程计入了运动速度和热量转移。这些物理过程又互相发生作用。当任何一滴受热液体往上转动时，它会接触到较冷液体而损失热量。但是，如果环流转动得足够快，流体到达顶部时还来不及把多余的热量完全排放掉就开始从另一面

---

① Ferris wheel，在垂直转动的巨轮上挂有坐位的游玩器具。——译者

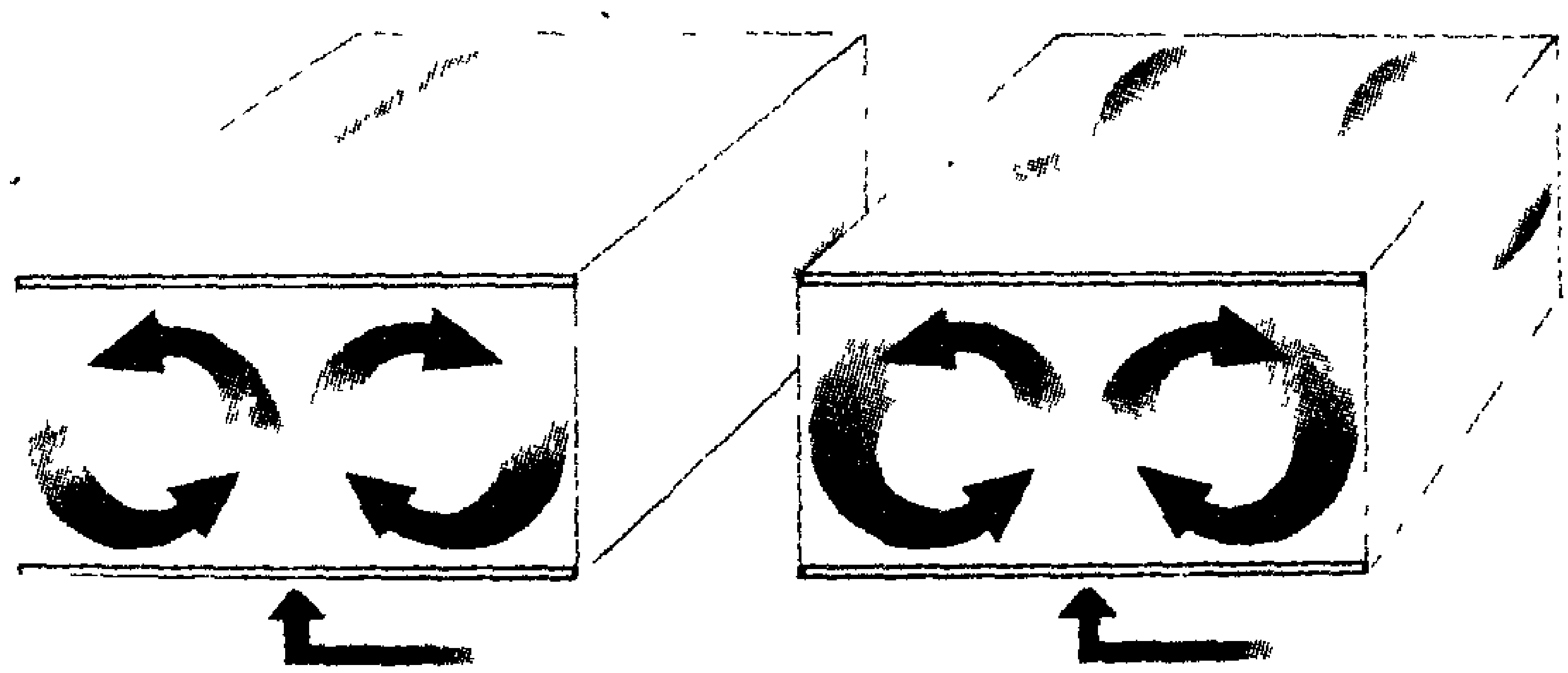


图 2 2　卷动的流体

当液体或气体由下面加热时，流体倾向于把自己组织成柱状的圆卷（左图）。热的流体由一边上升，失去热量，然后在另一边下降——这就是对流的过程。当热量继续增加时（右图），出现不稳定性，在圆卷中出现起伏，它沿着这些圆柱的长度方向前后运动。在更高温度下，流动变得混乱。

往下转动，于是实际上它开始把随后升起的热流往回推。

虽然洛伦兹系统未能完整地模拟对流现象，但是它却准确地对应着某些实际系统。例如，这一方程组精确地描述一种老式发电机。在这种发电机中，电流从一个在磁场中旋转的圆盘上流过，它实际上是现代发电机的鼻祖。在一定条件下，这种电机的转动方向会反过来。当洛伦兹方程变得更为人知晓之后，有些科学家就建议说，这种发电机可以用来解释自然界中的另一种反转现象：地磁场的反向。现在知道，在地球的发展史中，"地球发电机"曾经多次反转，反转的间隔

时间看来是不规则而无法解释的。理论家们面对这种不规则性时，典型的做法是在系统之外寻求解释，假定这些变化是由陨石撞击引起的。然而，很可能地球发电机本身就包含着混沌。

另一个由洛伦兹方程准确描述的系统是一种水轮，这是旋转对流的机械类比。水轮边缘上装着吊篮，水流由顶部以恒定速度注入篮中。每个吊篮由一个小孔不断漏水。如果水流速度很低，顶部的吊篮永远不能迅速装到可以克服摩擦力往下转的程度。然而，如果水流加快，吊篮的重量开始使水轮转动。转动可以达到连续状态。或者，如果水流过快，则装着水的重吊篮可能冲过最低点从另一面往上升。这就使得水轮减速，停止，甚至反向旋转，出现一会儿正转一会儿反转的情形。

对于这样简单的机械系统，物理学家的直觉——在没有混沌概念之前的直觉——告诉他，只要水流不变，那末经过相当长时间之后总要发展到定态。或者水轮达到以恒定速度旋转的状态，或者它以稳恒方式左右摆动，即以固定的时间间隔向左或向右偏转。然而，洛伦兹发现事情并非如此。

这个系统的运动由3个变量、3个方程完全描述无遗。洛伦兹的计算机打印出这3个变量不断变化的数值：0—10—0；4—12—0；9—20—0；16—36—2；30—66—7；54—115—24；93—192—74。随着想象中的时间间隔一拍一拍地跳过，这3个变量时而上升，时而下降，有时经过5步，有时经过100步，有时经过上千步。

为了从数据中得出图象，洛伦兹把每3个数一组作为三维空间中一个点的坐标。于是数字的序列就导致了点的序列，

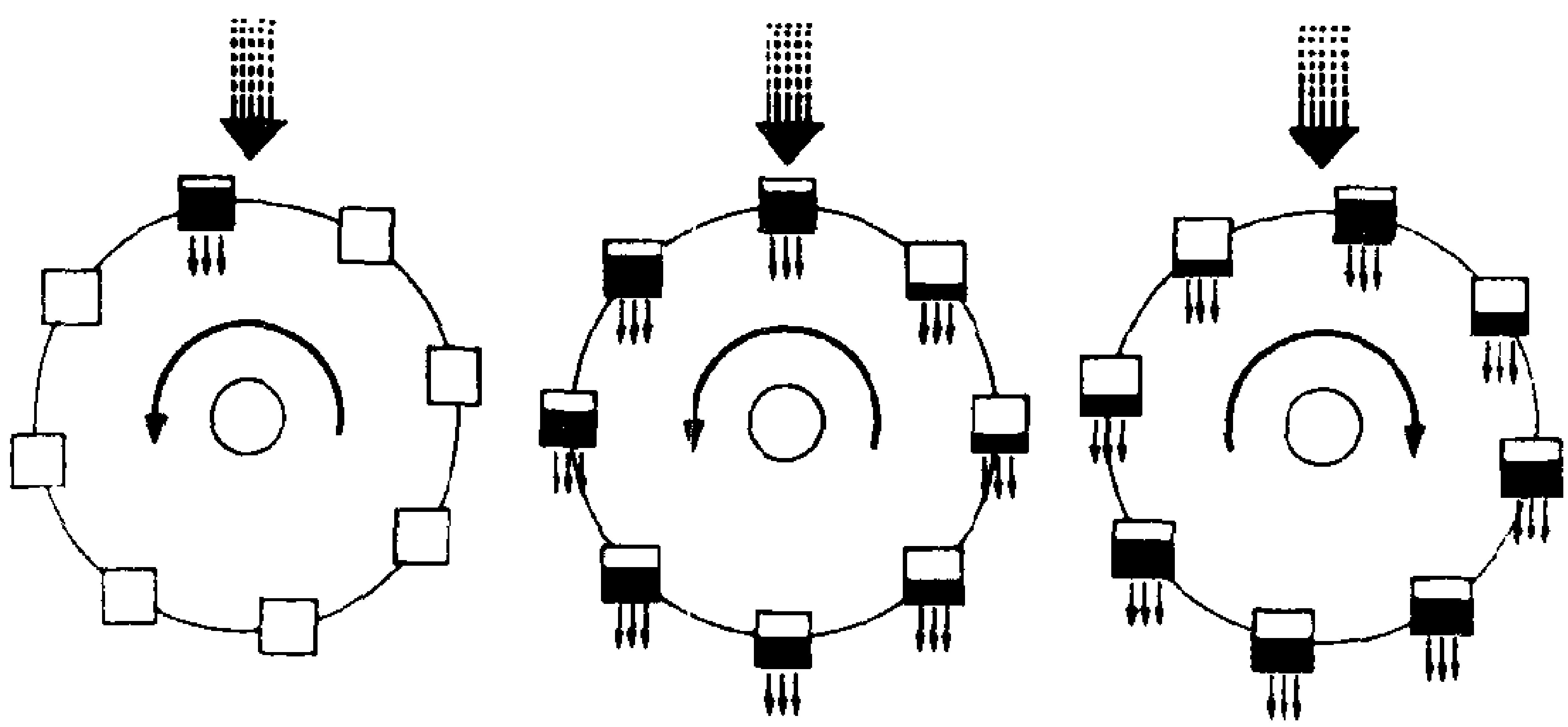


图 2 3　洛伦兹水轮

洛伦兹所发现的第一个著名的混沌系统准确对应于一种力学设备——水轮。这种简单设备可能给出令人惊异的复杂行为。

水轮的转动和液体对流中“卷筒”的转动有某些共同之处。水轮就像是“卷筒”的一片。这两个系统都处在水或热的恒定驱动之下，都要消耗能量。流体损失热量，水轮的吊篮损失水量。两个系统的长时间行为都依赖于驱动能量的多少。

水流由顶部以恒定速度注入。如果水流的速度很低，顶部的吊篮不能装满到足以克服摩擦力的程度，水轮永远不会开始转动。（同样，如果输入流体中的热量太小，不足以克服黏性，它也不会使流体动起来。）

如果增高流速，顶部吊篮的重量使水轮开始转动（左图）。水轮可以达到以恒定速度继续转动的状态（中图）。

然而，如果水轮转得更快（右图），旋转就可能因为系统内在的非线性而变得混沌。当吊篮从水流下经过时，它能充满到什么程度取决于转速。如果水轮转得很快，吊篮来不及装满。（同样，在快速旋转的对流“卷筒”中的液体也来不及吸收热量。）更有甚者，当水轮快速转动

时，吊篮可能来不及把水倾倒出去就从另一面上升起来。结果，上升一侧的装着水的吊篮可能使转速下降甚至变成倒转。

洛伦兹发现，事实上在较长的时间里旋转可能多次反向，它永远达不到恒定的速度，也不以任何可以预报的方式重复。

它们形成一条连续的路径，记录着系统的行为。这样一条路径可能达到某一点而停止不前，这就意味着系统进入了定态，速度、温度等等变量都不再变化。这条路径也可能形成一个闭环，不断地周而复始地重复。这意味着系统进入了周期性地自我重复的行为模式。

洛伦兹系统不属于上面两种情形。相反，相应路径显示了一种无限复杂的图形。它虽然永远处在一定界限之内，不跑到画面之外去，但又不自我重复。它描绘出一种奇怪的、特殊的形状，像是三维空间中的一种双螺旋，又像蝴蝶展开了两翼。它的形状标志着纯粹的无序，因为没有任何一个点或一批点组成的图形会再次出现，但是它也标志着一种新的有序。

"我们完全没有抓住要点"

许多年以后，物理学家们提到洛伦兹描述这些方程的论文时会说："那是一篇妙文。"到那时候提到它会像是提及古代的文卷，其中包含了一些永恒的秘密。在关于混沌的成千上万篇技术论文中，很少有哪篇比"决定性的非周期流"被引用得更多。在许多年月里，也没有哪一个研究对象像本书环衬的那条神秘曲线，那个后来被称为洛伦兹吸引子的双螺旋线，引出了这样多的图片说明，甚至动画片。洛伦兹的图

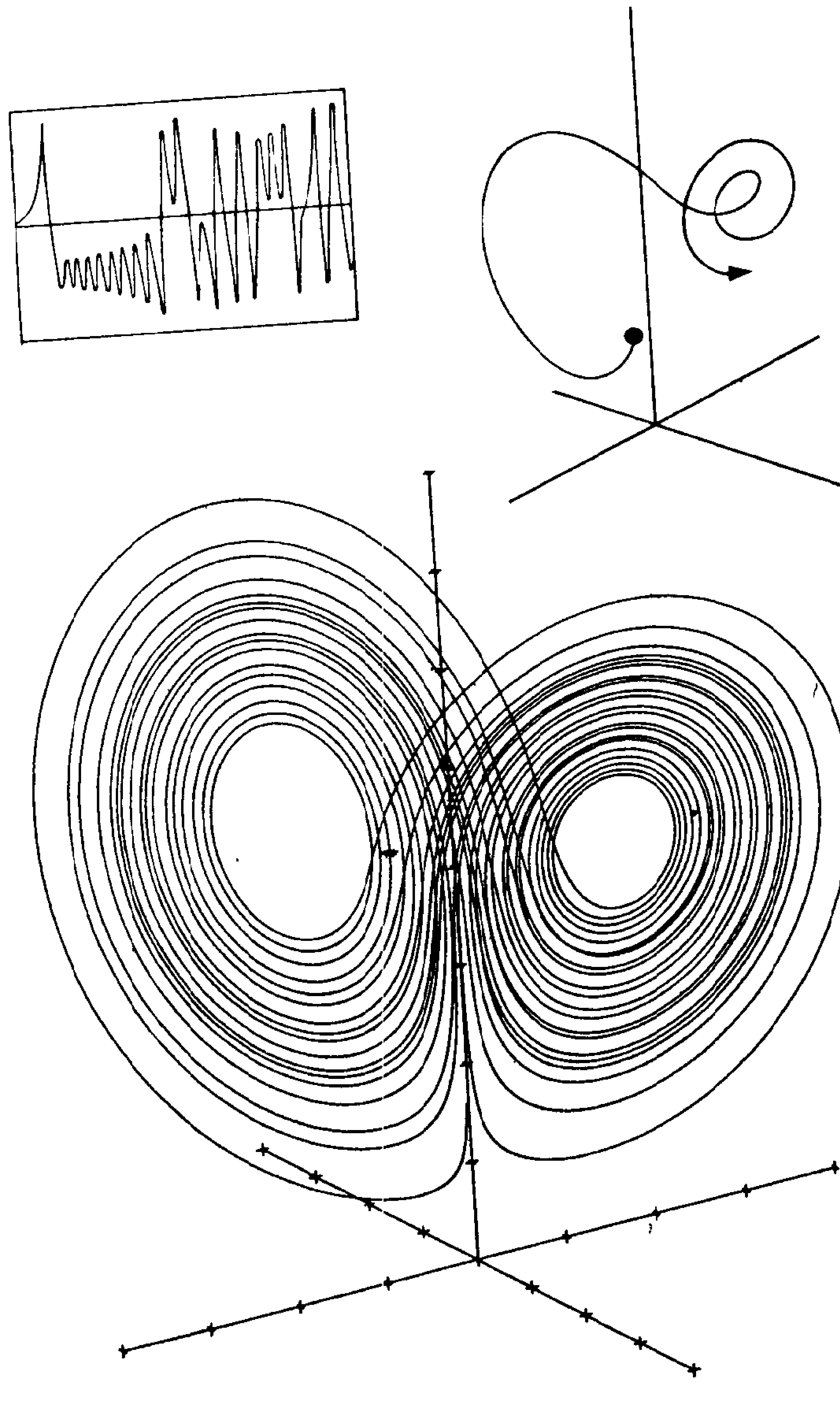


图2 4　洛伦兹吸引子

这个魔术般的形象，有点像猫头鹰面部，又像蝴蝶翅膀，已经成为早期混沌研究者所用的徽记。它揭示出隐藏在无序的数据流中的精细结构。传统的做法是，任何一个不断变化的量都可以表示成所谓时间序列（左上图）。为了表示三个变量的变化关系，必须使用不同的技术。在任一时刻，这三个变量的值在三维空间中定出一个点的位置。当系统变化时，这个点的运动就代表了连续变化的那些变量。

由于系统从不完全地自我重复，点的轨迹也永远不会自己相交。相反地，它永不停止地转着圈子。吸引子上的运动是抽象的，但它给出一点现实系统中运动的味道。例如，从吸引子的一翼跳到另一翼，就相当于水轮或对流的转动反向。

形第一次表明“这是复杂的”一语的含义。混沌的全部丰富内容尽在于此。

然而，当年很少有人能看到这一点。洛伦兹对麻省理工学院的应用数学教授马库斯描述了自己的结果。这位绅士风度的科学家具有能够欣赏同事们的工作的雅量。他笑着说：“老洛，我们明白，而且完全明白，流体对流根本不是这么回事。”马库斯告诉洛伦兹，那种复杂性必定会被阻尼掉，系统最终会归结到稳恒的规整的运动。

在经历了一代人的时间之后，也就是马库斯在自己的地下实验室里建立了一个实际的洛伦兹水轮以便向不相信的人演示之后几年，他说：“当然，我们当时完全没有看准。洛伦兹完全不是在用我们熟知的物理观念思考。他是在用一种广义的或抽象的模型思考，这种模型表现出他直觉地感到是外部世界某些方面所特有的行为。不过他当时也讲不清楚。只

是在事后，我们才认识到他当时应已具有那样的观点了。”

局外人很少会知道科学界已经分割成这么多互不往来的部分，就像是战舰为防止漏水而分成的密封舱。生物学家们不去读数学文献，已经有足够多的东西要读，就是在生物学内部，分子生物学家不去读种群生物学，也已经有足够多的东西要读了。物理学家们有比读气象学文献更重要的事去做。某些数学家看到洛伦兹的发现也许会激动不已；10年之内，物理学家、天文学家和生物学家们一直在寻求某种类似的东西，而且有时又为自己重复发现了洛伦兹已知的事物。然而，洛伦兹毕竟是一位气象学家，而没有一个人想到要在《大气科学杂志》第20卷第130页上去寻找混沌。

3 革命

当然，全部努力就是要使自己
置身于人们称为统计的常规之外。

——斯彭德

看得见的一场革命

科学史家库恩描述了40年代两位心理学家进行过的一次搅弄人的实验。把一批扑克牌拿给受试者看一下，每次看一张，并要他们说出是什么牌。这里面当然做了一点手脚。有少量牌是反常的：例如，黑桃6成了红色的，或者方块皇后是黑色的。

高速实验时，受试者们倒很平静地应付着。事情不可能更简单了。他们根本看不出反常之处。黑桃6呈现红色时，他们或者叫“红心6”，或者叫“黑桃6”。然而当亮牌的时间拉长之后，受试者们开始踌躇。他们感到有点问题，但是还不

很清楚到底是怎么回事。一位受试者可能说他看到了一点奇怪的东西，好像黑心镶上了红边。

当速度进一步放慢之后，多数受试者终于明白了。他们开始看到错牌，并且作好必要的思想准备以便不出错地玩下去。但并非每一位都如此。有少数人感到无所适从，并为此苦恼。有一位说："我搞不清楚那是一副什么牌。那时那张牌看起来不像一张牌。我不知道它是什么颜色，是桃还是心。我的天，我甚至弄不清楚黑桃究竟是什么样子！"

职业科学家们在短暂而不确定地看一下大自然的杰作时，他们面对着不谐调性，也是同样会感到苦恼和迷惑的。然而，当不谐调性改变科学家们看问题的方式时，它往往能促成最重要的进展。库恩就是这样议论的，而混沌的故事也正有这样的作用。

当库恩于1962年初次发表自己关于科学家们如何工作、科学革命怎样发生的看法时，赞赏和反对意见几乎同样多，所引起的争论至今尚未结束。他对那种科学进步基于循序渐进、温故知新、新实验要求新理论的传统观点施以针砭。他抛弃了科学是规规矩矩地提出问题和寻求答案的过程这种看法。他强调要区分科学家们在各自学科范围内从事的规律已知的工作和那些例外的、非正规的、开创革命局面的研究。他把科学家们描述成不那么完全的唯理论者，这不是偶然的。

按照库恩的划分，正规的科学大量地是由收拾工作组成的。实验家们在稍作改变的条件下重复从前已经做过多次的实验。理论家们在已有的理论大厦上添砖加瓦。事情就是这样。如果所有科学家都必须从头开始，对基本的假定提出质疑，他们将被逼着去达到从事有益工作所需要的在技术上造

诣精深的水平。在富兰克林的时代，想理解电现象的少数科学家们能够而且事实上必须提出自己的基本原理。一位研究者可以把吸引看作最重要的电效应，把电想象成从物质中发射出来的一种“以太”。另一位研究者可以把电想象成由导电材料传送的一种液体。这些科学家与外行人之间，几乎可以和科学家们相互间同样容易地交谈，因为他们还没有达到给所研究的现象赋予一种共同的专门语言的程度。相反，一位20世纪的流体动力学家如果不使用一些专门术语和数学技巧，就难以期望在自己的领域中促使知识进步。结果，他很可能不自觉地放弃对自己的学科提出根本性问题的自由。

库恩的中心思想就是把正规的科学看成是解决问题，就像学生们第一次打开教科书时要学习的那类问题。这些问题规定了一种公认的获取成果的风格，大多数科学家就是这样经过研究院、学位论文、期刊文章而开辟学术前程的。库恩写道：“在正规条件下，一位研究科学家不是革新者，而是解难题的能手；他所专心致志的难题正是那些他确信可以在现存科学传统的范围内提出和解决的问题。”

然而，还有科学革命。一门科学走入绝境时，新科学就应运而生。科学革命常常具有跨学科的特色——它的核心发现往往来自那些走出本专业正常范围之外的人们。使这些理论家们倾心的问题经常被认为是离经叛道的臆想。他们的学位论文被否定，文章被编辑部退稿。这些理论家本身也不那么肯定能否在看到答案时就予以确认。他们在科学生涯中承受风险。有些自由思考者干脆独自工作，他们无法解释清楚正在走向何方，甚至不敢告诉同事自己在做什么。这种浪漫形象既符合库恩设想的主旨，也在现实生活中，在对混沌的

探索中，一再出现。

每一位在早期转向混沌的科学家都有一段辛酸史。有人警告研究生，如果他们在没有经过考验的、导师本人也不擅长的领域里写论文，就会断送前程。一位粒子物理学家在听说这门新鲜数学之后，也许会自己玩一番，认为它确是美妙的东西，既美妙又艰难，但是他感到决不能对同事们提起。老教授们觉得他们是在经受一场中年危机，在看来要被许多同事误解或抱怨的研究方向上下赌注。然而他们也感受到那种来自真正新鲜事物的理智上的刺激。甚至那些对此有所接触的局外人也感受到这一点。对于普林斯顿高等研究所的戴森来说，70 年代混沌新闻的到来"像一次电击"。另外一些人则感到他们是在自己的职业生涯中第一次目击科学楷模的更替、思维方法的转变。

那些在早期就认识混沌的人们，曾经苦于如何把自己的想法和发现表述成可以发表的形式。这些工作介于不同学科之间，例如，它们对物理学家来说过分抽象，而对于数学家来说又嫌偏于实验。在有些人看来，交流新思想的困难，以及来自传统角落的顽固阻力，正好表明了新科学的革命性。肤浅的观念可以被认同，而那些要求人们重组其世界图象的思想则引起敌意。佐治亚州理工学院的一位物理学家福特曾引用托尔斯泰的话来说明这种现象："我知道多数人，包括那些能轻易处理极复杂问题的人们，很少能够接受最简单、最显然的真理，只要这会强使他们承认那些平日乐于向同事们解释的结论的虚假性，因为用这些结论他们曾经骄傲地施教于他人，曾经一针一线地织成自己生活的锦衣。"

许多主流科学家仍只是模糊地意识到这门新科学的出

现。有些人，特别是一些传统的流体动力学家，曾积极反对。起初，有关混沌的主张听起来是粗野而非科学的。而且，混沌所依靠的那种数学看起来也是非常规的和艰难的。

随着混沌专家的增多，有些院系对这些偏离正统的学者表示不满，有些则大事招徕。有些期刊建立了不成文规定拒登有关混沌的稿件，另一些则标新立异，专门处理混沌。这些混沌学家或混沌论者（不时可以听到人们造出来的这些新名词）以不成比例的频率出现在每年的重要会员名单和得奖名单上。到了80年代中期，学术扩散过程使一些混沌专家到了大学管理机构中有影响的位置上。建立了一些中心和研究所，以专门研究"非线性动力学"和"复杂系统"。

混沌已经不仅是理论，而且变成了方法；它不仅是一些信条，而且提供了从事科学研究的一种方法。混沌创立了一种它自己的使用计算机的技术，这种技术不是要求克雷和赛伯的那种高速度，而是偏爱于那些能进行灵活对话的运速适中的终端。对于混沌研究者，数学已经变成一门实验科学，计算机代替了充满试管和显微镜的实验室。图象显示是关键。一位混沌专家会说："数学家不使用图象，那简直是受虐狂。他们怎么能看到这种运动与那种运动之间的关系？怎么能发展直觉？"有些人一面开展工作，一面又断然否认这是一场革命；另一些人则故意引用库恩关于科学楷模更替的语言来描述他们所目睹的变化。

从风格上讲，有关混沌的早期论文使人们回想起富兰克林时代，因为这些论文都追溯到最初的原理。就像库恩指出的，已经成型的学科总是认为给定了一批知识作为进行研究的共同出发点。为了不使同行们感到厌烦，科学家们通常只

在文章开始和结束时讲些行话。与此形成对照的是，70年代后期以来的混沌论文，却从头至尾带有某种说教味。他们往往宣布一些新的信条，而在结尾时号召人们行动起来。这些结果在我们看来既令人兴奋又富有挑战性。湍流转变的理论图象正在开始形成。混沌的核心在数学上是可及的。混沌从现在预知未来，这是无人否认的。然而为了迎接未来，人们还得在很大程度上摈弃过去。

新的期望，新的风格，而最重要的是新的看法。革命不是靠积铢累寸，而是用一种自然观取代另一种。旧问题要用新观点重新审视，而另一些问题则第一次被认识到。这里所发生的事情有些像整个工业更换机器来进行新的生产。用库恩的话来说，"就像整个科学界被突然转移到另一颗行星上，那里人们熟悉的事物被看成了别的事物，而同时又掺入了许多不熟悉的事物。"

摆钟、太空球和秋千

这门新科学做实验时不用鼠而用摆：这是经典力学的徽记，受约束运动的范例，钟表规律性的概括。一个摆锤在细杆端头自由地摆动着。有什么东西能比这个简单系统与激烈的湍流更风马牛不相及呢？

按照可疑的传说，阿基米德在自己的澡盆里得到启发，牛顿曾经得益于下落的苹果，而伽利略观察过教堂里的吊灯，它前后摆动，周而复始，把信息一次次地送进伽利略的意识中。惠更斯把摆的可预测性变成了计时手段，使西方文明义无反顾地走上了一条新路。傅科在巴黎先贤祠里用20层楼高的摆

揭示了地球的旋转。直到出现石英振荡器之前，每一只钟和每一块手表都依赖于一定尺寸和形状的摆。(就此而言，石英晶体的振荡也相差无几。)在没有摩擦力的太空中，周期运动来自天体的轨道，而在地球上，任何规则的振荡实际上源于摆的同类物。描述基本电子线路的方程，同描述摆锤的方程完全一样。电子振荡虽要快几百万倍，物理机制其实是相同的。但到了 20 世纪，经典力学已经成为严格限于教室讲授和日常工程设计的事情。科学博物馆中用摆作装饰，国际机场的礼品商店里陈列着用塑料制作的旋转“太空球”形状的摆。没有哪一位从事研究的物理学家再关心摆的运动。

然而，在摆里面还隐藏着石破天惊的奇迹。它又像在伽利略的革命时代一样成为科学的试金石。当亚里士多德观察摆时，他看到的是一块重物要投入大地的怀抱，由于受到绳子的限制，因此只能来回剧烈摆动。这在现代人听起来像是傻话。用经典的运动、惯性和引力概念熏陶出来的人，是很难欣赏亚里士多德理解摆的运动时所持有的那种自洽的世界观的。对于亚里士多德来说，物理运动不是一种量或力，而是一种变化，就像人体要长高一样的变化。一个落体要寻求自己的自然状态，即一旦获得自由时要达到的状态。就前后连贯性而言，亚里士多德的观点不无道理。当伽利略观察摆时，他却从另一角度看见了可以测量的规则性。为了解释这一点，要求在理解物体运动上实行革命。伽利略比古希腊人进步之处，并不在于他掌握了更好的数据。相反地，他当时对摆进行准确测时的想法，只不过是邀集一批朋友来数清 24 小时内的振动次数——这是一种费时费力的实验。伽利略之所以看到了规则性，是因为他已经有了一个可预言这种规则

的理论。他懂得了亚里士多德当年不能明白的事：运动物体倾向于保持运动，速度或方向的改变只能用某种外力例如摩擦力来解释。

事实上，他的理论是如此有力，以至于他能够看到并不存在的规则性。他竭力主张长度一定的摆不仅准确地保持着周期，而且不论摆动角度大小如何，都保持同一周期。振幅较宽的摆要经过较长的路程，但它恰到好处地要运动得快一些。换句话说，他的运动周期与振幅无关。“如果两位朋友约好来数摆的振动，一位观察振幅宽的摆，一位观察振幅窄的摆，那他们即使观察几十几百次振动，也不会出现一次甚至几分之一次不一致的情形。”伽利略在这里用实验的语言来表述他的主张，而理论使它变得很可信，以致在多数高中物理教科书中至今还在作为真理来讲授。然而，这是错误的。伽利略看到的规则性只是一种近似。摆锤运动的角度变化在方程中引入小小的非线性。振幅很小时，几乎没有误差。然而确实存在着误差，即使在伽利略所描述的粗糙实验里，这误差也是可以测量的。

小小的非线性很容易被忽略。从事实验的人们很快就明白自己并非生活在完美无缺的世界里。在伽利略和牛顿以来的几个世纪中，寻求规则性曾是一切实验的基本要求。实验家们总是寻求不变或者等于零的量。但是这就意味着必须忽略那些干扰纯净图象的小小杂乱之处。如果一位化学家发现两种物质的比率在第一天是 2.001，在第二天是 2.003，而在第三天是 1.998，那除非他是傻瓜才不去寻求能够解释完善的 2∶1 组分的理论。

为了得到纯净的结果，伽利略也不得不忽略他当时已经

知道的非线性——摩擦力和空气阻力。空气阻力是实验中令人讨厌的捣乱鬼，它所引起的复杂性是为了揭示新诞生的力学科学的本质所必须设法摆脱的。羽毛和石头降落得同样快吗？所有关于落体的经验都作出否定的回答。关于伽利略从比萨斜塔往下扔球的带有神秘性的故事，乃是借助于发明一个理想的科学世界，使得规则性能与经验中的无序性分开来，以期改变人们直觉的故事。

把引力和空气阻力对给定重物的影响区别开来，乃是人类智慧的光辉成就。它使得伽利略得以接近惯性和动量的本质。然而，在现实世界里，摆还是遵从着亚里士多德的古老诱人的楷模的预言：它们最终停止下来了。

为了给科学楷模的下一次更替奠定基石，物理学家开始正视被许多人所承认的他们在关于像摆这样的简单系统的教育中的缺陷。到了我们这个世纪，像摩擦力这样的耗散过程已经被认识，学生们也学会如何把它们计入方程之中。学生们也得知非线性系统通常是不可解的——这是对的，而且非线性系统往往都是例外的情况——这就不对了。经典力学描述几大类运动物体的行为：摆和双摆，卷起来的弹簧和弯曲的杆，弹拨弦和拉弓弦。相应的数学同样地适用于流体系统和电系统。然而，在整个经典时代几乎没有一个人猜想过在动力系统中还会潜伏着混沌，它只有在非线性发挥其应有作用时才破门而出。

物理学家如果不懂得摆，就不可能真正理解湍流或其他复杂性——而且必须按照20世纪上半叶不可能有的那种方式来认识摆的运动。混沌观点统一着各种不同系统的研究，摆的动力学也随之囊括了从激光到超导约瑟夫森结的高技术领

域。某些化学反应同心脏跳动一样表现出类似摆的行为。就像一位物理学家所指出的，新的出乎意外的可能性扩展到“生理学和精神病学、经济预报，甚至于社会演化”。

考虑一下游戏场上的秋千。它下降时加速，上升时减速，不断由于摩擦力而失去一点速度。它同时受到例如来自某种钟表机制的规则的推动。全部直觉会告诉我们，不管秋千从何处开始运动，它最终会达到规则的前后摆动，每次都摆到同样高度。事情是可能这样发生的。然而，看起来奇怪的是，秋千的运动也可能变成杂乱的，时高时低，永远不达到某种定态，永远也不确切地重复过去有过的摆动方式。

这种令人惊异的杂乱行为来自这个简单振子中能量流出流入时的一种非线性的曲折。秋千既受到阻尼，又受到驱动：阻尼是由于摩擦力试图使它静止下来，驱动则由于周期性地受到推力。即使阻尼和驱动两相平衡，系统本身也不处于平衡。世界上这种系统比比皆是。天气就是第一个例子，这里空气和水的运动摩擦以及向外空的热量耗散导致阻尼，而太阳能的常在的推力造成驱动。

然而，物理学家和数学家们在60年代和70年代又开始严肃谈论摆，其原因并不在于它的不可预言性。不可预言性只是引起注意的缘由。那些研究混沌动力学的人们发现，简单系统的无秩序的运动很像一种创造过程。它产生复杂性：有时稳定有时不稳定的、有时有限有时无限的丰富的有组织的图案，而且总带有活物般的诱惑力。这就使得科学家们摆弄起玩具来了。

有一种称作“太空球”或“宇宙秋千”的玩具，它是像字母T一样的摆，下面是一个重球，上面顶着的横杆两端有

一对小球。下面的重球前后摆动，而上面的横杆可以自由转动。三个球里面都装有小小的磁铁。一旦开始运动，这个设备就会动下去，那是因为底座中还装着一个由电池供电的电磁铁。每当下面的重球经过时，这设备就感受到它的来临，并给予它以小小的磁力推动。有时这个玩具会进入稳恒的有节奏的摆动。但在另一些情况下，它的运动看起来处于混沌之中，总是变化莫测。

另一种普通的基于摆的玩具，不过是一架所谓的球面摆——一种不仅能前后摆动而且可沿任何方向运动的摆。它的底座里也放了一些小磁铁。这些小磁铁吸引金属摆锤。每当摆静止下来时，它总是被某一块磁铁吸住。基本思想是使这个摆动起来，同时猜测哪一块磁铁会“赢”。即使只用形成三角形的三块磁铁，这个摆的运动也是不可预言的。它在磁铁A和B之间摆动一阵，然后转移到B和C之间，随后在看起来要落到C上时又突然跳回A处。假设一位科学家系统地探究这个玩具的行为，即按如下方法画一张图。取一个起点，把摆锤置于该点，放手使它自由运动，根据它最后停在哪一块磁铁上，把所选的起点涂成红色、蓝色或绿色。这张图会成为什么样子呢？可以预期，它有一些全是红、蓝或绿色的区域，在这些区域中，摆锤总是可靠地停止在某个特定的磁铁上。然而图上还有一些区域，那里三种颜色以无限复杂的方式交错在一起。在与一个红点相邻处，不管察看得多么近，不管把图放大多少倍，都会看到一些绿点和蓝点。因此，从任何实际的角度看，摆锤的命运都是不可预测的。

从传统上讲，动力学家们认为写下一个系统的方程就是理解这个系统。怎么才能更好地抓住运动的实质呢？对于一

架秋千或一个玩具来说，方程组把摆的角度、速度、摩擦力和驱动力联系到一起。然而，由于这些方程中小小的非线性，动力学家发现自己在回答与这系统的未来有关的最容易的实际问题方面，其实是无能为力的。一台计算机可以用模拟的方式提出问题，并迅速计算出每一个周期。但是模拟过程有自己的问题：每次计算所固有的小小的不精确性很快就变得大起来，因为这是一种对初始条件具有敏感依赖性的系统。用不了多长时间，信号就会完全消失，剩下的只是噪声而已。

难道不是这样吗？洛伦兹发现了不可预言性，然而他也曾发现过规则的模式。另外一些人也曾在貌似随机的行为中发现过结构的踪迹。摆的例子过于简单而易被忽视，但那些不忽视它的人却得到了发人深省的启示。在一定意义上，他们意识到物理学虽然完美地理解了摆的运动的基本机制，却不能把这种理解推广到长时间行为。微观的小片极为清晰，而宏观行为却神秘莫测。传统的从局部看系统的方式，即孤立出作用机制然后把它们加到一起的办法，开始失效。对于摆、流体、电子线路或者激光器，知晓基本方程根本不再足以构成正确的知识。

在整个60年代，有一些科学家各自作出平行于洛伦兹的发现。例如，一位法国天文学家（埃侬）研究银河系的轨道，而一位日本工程师（上田）模拟电子线路。然而，最早审慎而协调一致地试图理解整体行为怎么会与局部行为发生差异的人却是数学家们。他们之中有一位是加州大学伯克利分校的斯梅尔，他已经因为解决了多维拓扑学的最深奥问题而享有盛名。一位年轻物理学家在闲谈时问斯梅尔正在做什么。那答案使他摸不着头脑："振子。"这简直是无稽之谈。摆、弹

簧和电路这些振子，是物理学家们在早期训练中就已经了解的那类问题。这些问题是很容易的。为什么一位伟大的数学家要研究初等物理学呢？只是在若干年后，这位年轻人才意识到斯梅尔当时是在考虑非线性振子，混沌振子，观察那些物理学家们曾经视而不见的事物。

“马蹄”的发明

斯梅尔提出了一个错误的猜测。他用最严格的数学语言假定，实际上所有的动力系统在大多数时间里往往处于不太奇怪的运转状态。然而他不久就发现，事情并不是这么简单。

斯梅尔不仅是一个自己解决问题的数学家，他还提出供别人去解决的问题大纲。他把自己对历史的理解和对自然的直觉贯穿起来而得以平静地宣布，一整个未曾开发的研究领域值得数学家们去花费心血。就像一位成功的商人一样，他估计着风险并冷静地谋划战略，他具有像步行吹笛人①一样的品质。斯梅尔引导的方向，总有很多人相随。然而，他的名声并不限于数学。早在越南战争时期，他和鲁宾就组织过“国际抗议日”，并发起阻止军车通过加州的活动。在 1966 年，正当国会非美活动委员会准备传讯他时，他却飞往莫斯科去参加国际数学家大会了。在会上他被授予菲尔兹奖，这是数学界的最高荣誉。

---

① Pied Piper，童话中用笛声把全城老鼠或小孩引走的步行吹笛人，后指有号召力的人物。——译者

那年夏天在莫斯科发生的一幕，成为关于斯梅尔的传说中不能抹去的一段。5000 位激动的和鼓动别人的数学家相聚在一起。政治空气十分紧张。各种声明在与会者中流传。正当会议临近结束之际，斯梅尔应一位北越记者的请求，在莫斯科大学宽阔的台阶上举行了记者招待会。他先谴责了美国对越南的干涉，接着，正当他的主人开始微笑时，他转而谴责苏联入侵匈牙利以及苏联国内缺少政治自由。他讲完之后被匆匆拥入一辆汽车去接受苏联官员的询问。当他回到加州时，美国科学基金会取消了对他的资助。

斯梅尔得到菲尔兹奖，是表彰他在拓扑学中的一项著名工作。拓扑学是 20 世纪繁荣起来的一个数学分支，50 年代正处于鼎盛时期。拓扑学研究几何形状由于扭曲、拉伸或压缩而变形时仍然保持不变的那些性质。形状的方圆大小与拓扑学无关，因为这些性质在拉伸时就会改变。拓扑学家们只问一个形状是否连通，是否有洞，是否打结。他们不仅想象在欧几里得的一、二、三维宇宙中的曲面，而且想象在不可能形象化的多维空间中的曲面。拓扑学是橡皮板上的几何学。它关心的是定性而不是定量问题。它的提法是，如果不去测量，关于整体结构能作出什么结论。斯梅尔解决了拓扑学历史上一个久悬未决的问题，即庞加莱关于五维以上空间的猜想，于是成为在这一领域中站住脚的伟人之一。但是他在 60 年代却离开拓扑学而转入未开发的领域，开始研究动力系统。

拓扑学和动力系统这两门学问都溯源于庞加莱，他曾把它们视为一枚钱币的正反两面。在 20 世纪初，庞加莱是就物理世界中的运动规律提出几何想象的最后一位伟大的数学家。他是第一位懂得混沌可能性的人；他的著作里提示了几

乎像洛伦兹所发现的那种严重的不可预言性。但是庞加莱死后，拓扑学兴而动力系统衰。甚至于连名称本身都废置不用；斯梅尔转而研究的对象名义上叫做微分方程。微分方程描述系统随时间连续变化的方式。传统方式是从局部上去观察事物，也就是说工程师或物理学家们每次只考虑一种可能性。斯梅尔和庞加莱一样，企图从整体上去理解它们，也就是说他想一举阐明全部可能性。

任何一组描述动力系统的方程，例如洛伦兹的模型，都允许在开始时确定某些参数。对于热对流而言，液体的黏滞性就是一个参数。参数的大变化可以导致系统的大差异，例如使系统达到定态与进入周期振荡之间的差异。但是物理学家们假定极小的变化只导致极小的数值差异，而不引起定性的行为变化。

使拓扑学和动力系统联系起来的，正是借助几何形状使系统行为的整个范围形象化的可能性。对于简单系统，相应的形状可能是某种曲面；而对于复杂系统，则可能是多维的流形。这样的曲面上一个单独的点，代表系统在时间被冻结的某一刹那的状态。系统随着时间进展时，这个点也移动，在曲面上勾划出一条轨道。把曲面稍稍扭曲相当于改变系统的参数，使流体更黏些或对摆驱动稍强些。看起来大致相像的形状给出大致同类的行为。如果人们想象出这些形状，也就理解了这个系统。

当斯梅尔转向动力系统时，拓扑学的发展同多数纯数学一样，正明显地轻视对现实世界的应用。拓扑学的起源与物理学有过密切关系，但是数学家们忘记了这物理起源，正在为形状本身而进行研究。斯梅尔完全确信这种学术精神，他

本人就是一位纯中至纯者，然而他有一种想法，认为拓扑学的抽象神秘的发展，已经到了可以对物理学有所贡献的时候，就像庞加莱在本世纪初曾经向往的那样。

斯梅尔最初的贡献之一，恰巧就是他的有错误的猜测。用物理语言说，他提出大致如下的一条自然定律：系统可能有混乱行为，然而这种混乱行为不可能是稳定的。稳定性，或者如数学家们有时说的“斯梅尔稳定性”，是一种关键性质。系统的稳定行为是那些不会因为某些数作了小小改变就消失的行为。任何系统可能同时具有稳定和不稳定行为。描述一支铅笔竖立在笔尖上的方程有很好的数学解，即重心位于垂直线上的解，然而人们不能使铅笔立在笔尖上，因为这个解是不稳定的。最轻微的扰动也会使系统离开这个解。另一方面，放在碗底的弹子会停留在那里，因为稍有扰动时弹子还会滚回原处。物理学家们假定他们可以正规地实际观察的任何行为都必须是稳定的，因为在实际系统中小小的扰动和不确定性总是不可避免的。你永远不能确切地知道那些参数。如果你需要一种模型，它在物理上是现实的，同时又在小扰动面前保持坚强，那末物理学家们就推想你需要的必然是一个稳定的模型。

1959 年圣诞节后不久，邮件带来了坏消息。当时斯梅尔正和妻子临时住在里约热内卢的一处公寓中，身边是两个婴儿和一大堆尿布。他的猜测定义了一类微分方程，它们全是结构稳定的。他宣称，任何一种混沌系统，都可以用这类方程中的一个方程组来任意逼近。事实并非如此。一位同事写信告诉他说，许多系统并不像他所想象的那样行为良好，信中还描述了一个反例，一个混沌与稳定性共存的系统。这个

系统是坚强的。如果对它稍加扰动，就像任何自然界中的系统经常受噪声干扰一样，它的奇怪行为并不消失。坚强而奇怪——斯梅尔以一种慢慢消逝的不信任感研读这封信。

混沌和不稳定性，这些刚开始获得形式定义的概念根本不是一回事。混沌系统可以是稳定的，只要它所特有的不规则性可以在小扰动下保持不变。洛伦兹系统就是一个例子，虽然几年之后斯梅尔才听说洛伦兹。洛伦兹所发现的混沌，尽管它完全不可预言，却像碗里的弹子一样稳定。你可以对这系统加上噪声，晃它，搅动它，干扰它的运动，最后当一切平静下来，瞬变过程像空谷回声一样消失之后，整个系统还是回到与从前相同的那一种特别的不规则模式。它是局部不可预言的，整体稳定的。现实的动力系统按照超乎任何想象的复杂规则而作用着。斯梅尔同事的信中所描述的例子，是不止一代以前的人所发现而几乎已被忘记的另一个简单系统。它恰巧是一只变形的摆，一个电子振荡回路。它是非线性的周期驱动系统，就像秋千上的小孩一样。

它实际上只是一只在20年代被荷兰电气工程师范德玻尔研究过的真空管。现代物理系学生可以在示波器屏幕上观看曲线形状来研究这种振子的行为。范德玻尔没有示波器，所以他不得不靠耳机中的音调改变来监听自己的线路。当他改变馈入的电流时，高兴地发现了行为的不规则性。音调会像爬楼梯一样从一个频率跳到另一个频率，离开一个频率之后又固定地锁到下一个频率上。然而，范德玻尔只是偶或注意到某些奇怪现象。对监听到的行为的不规则，他也无法解释。他并未因此而担忧。他在给《自然》杂志的一封信中写道："经常是在跳到下一个更低频率之前在耳机中听到不规则的

噪声。不过这是一种从属的现象。"他是曾与混沌有过一面之缘却没有适当的语言来理解它的众多科学家中的一位。对于试图制造真空管的人，锁频是重要的。然而对于试图理解大自然复杂性的人们，真正有趣的行为倒是那些由高低频率冲突而造成的"不规则的噪声"。

虽然自己的猜测是错的，斯梅尔却走上了领会动力系统全部复杂性的新轨道。有几位数学家曾经从其他角度研究过范德玻尔振子所提供的可能性，斯梅尔如今把他们的工作带入新的境界。他的唯一的示波器屏幕就是自己的思维，然而这是由于多年考虑拓扑世界而训练有素的思维。斯梅尔设想了振子的全部可能性范围，就像物理学家们所说的，全部相空间。系统在任一冻结时刻的状态由相空间中的一个点代表：这点的坐标包含了关于它的位置与速度的全部信息。系统以某种方式变化时，这点将移到相空间中一个新的位置。当系统连续变化时，这点就勾划出一条轨道。

对于摆这样的简单系统，相空间可能就是一个长方形：摆在给定时刻的角度决定点的东西向位置，而摆的速度决定南北向位置。对于规则地前后摆动的摆，相空间中的轨道是一个环，当系统周而复始地经历同一串位置时，这个环就一圈圈地绕下去。

斯梅尔不是只看任何单条轨道，而是集中注意于系统改变（例如增加驱动能量）时整个空间的行为。他的直觉从系统的物理实质跳跃到一种新的几何实质。他的工具是相空间中形状的拓扑变换——就像拉伸和压缩这些变换。有时这些变换具有明确的物理意义。系统中的耗散，由于摩擦而丧失能量，意味着系统在相空间中的形状就像气球漏气一样地收

缩，最后在系统完全静止时收缩到一个点。他意识到为了表示出范德玻尔振子的全部复杂性，对相空间应进行一种复杂的新的变换组合。他很快把自己使整体行为形象化的思想变成一种新模型。他的发明是被称作“马蹄”的一种结构，在以后的岁月中成为混沌的经久不衰的形象。

为了制作一种简单形式的斯梅尔马蹄，可取一长方形，将它上下挤压成一个水平长条。把长条的一端拉伸并折回到另一端旁边，形成字母C似的马蹄形状。然后设想把这个马蹄嵌入到一个新的长方形中并且重复同样变换，压缩、折叠和拉伸。

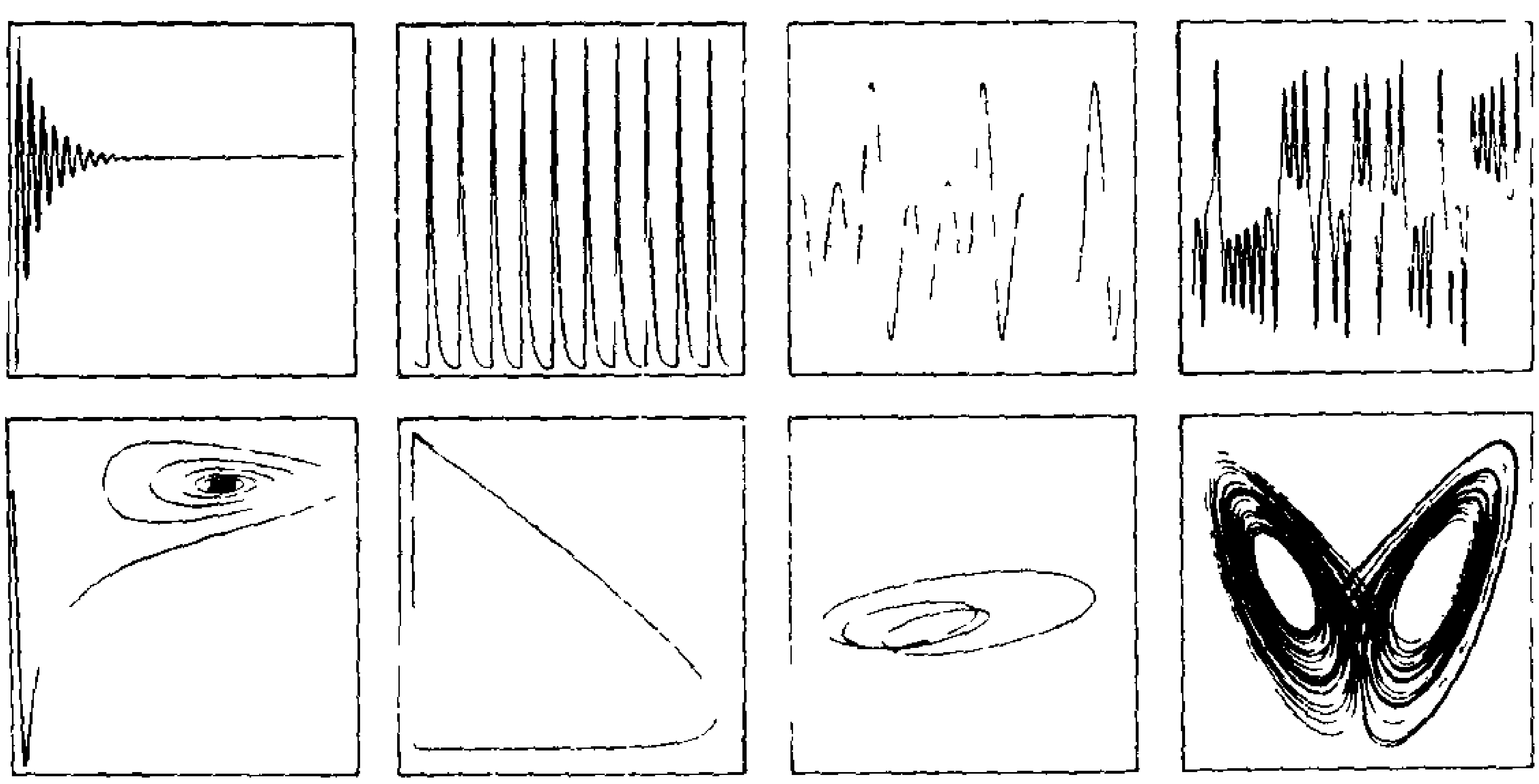


图 3 1　在相空间中画像

上图是传统的时间序列，下图是相空间中的轨道。这是显示同一组数据和得出系统长期行为图象的两种方法。从左面开始，第一个系统趋向定态——相空间中的一点。第二个系统总是周期重复，形成一个循环轨道。第三个系统以更复杂的华尔兹旋律即“周期 3”重复。第四个例子是混沌。

这种过程像是在模仿一种乳脂糖制造机，它的转动的长臂把糖拉伸到长度加倍，然后折叠回来，再继续拉伸，这样下去，一直到糖的表面变得很长、很细而且错综复杂地自我嵌套起来。斯梅尔将他的马蹄各部分按拓扑步骤分类。于是，可以把数学放到一边，用马蹄来作为几年后洛伦兹在大气中发现的对初始条件的敏感依赖性的精巧的形象类比。在原来的空间中取两个邻近的点，根本无法猜出它们最终将到达何处。所有那些折叠和拉伸将把它们驱赶到相距任意远处。那些后来彼此碰巧靠得很近的点将是从相距任意远处开始运动的。

最初，斯梅尔曾经希望只用拉伸和压缩来解释所有动力

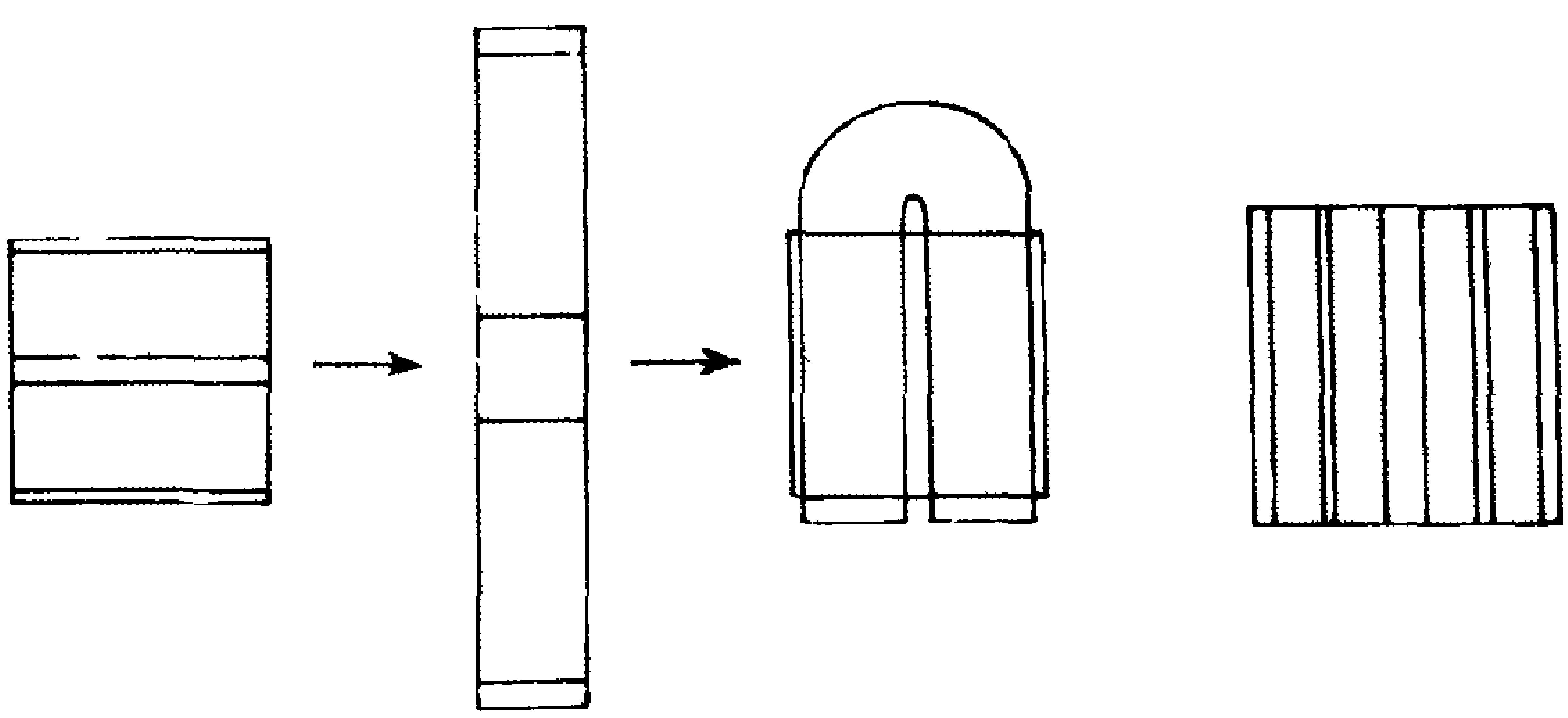


图 3 2　斯梅尔马蹄

这种拓扑变换提供了理解动力系统混沌性质的基础。原理是简单的：空间沿一个方向拉伸，沿另 一方向压缩，然后折叠起来。这一过程不断重复， 就形成了人们在和多层面团时所熟知的那种混和结构。两个最终离得很近的点可能在开始时是相距很远的。

系统，而不使用折叠，至少不使用那种会剧烈破坏系统稳定

性的折叠。然而折叠是必需的，只有折叠才允许系统的行为产生尖锐变化。斯梅尔马蹄成了许多新几何形状中的第一个，这些形状为数学家和物理学家提供了关于运动可能性的新直觉。在许多方面它仍然过于人为而缺乏实用性，过多地是数学拓扑学的创造，而不能为物理学家所欢迎。然而，它确实成了一个起点。60年代里，斯梅尔在伯克利聚集了一批年轻的数学家，他们共享着他对动力系统方面这项新工作的激情。还得再过10年时间，他们的工作才足以引起非纯粹科学的充分注意。当这一天到来时，物理学家们发现斯梅尔已经把一整个数学分支扭转过来面对现实世界。他们说，那是一段黄金时代。

斯梅尔的一位同事亚伯拉罕，后来是加利福尼亚州立大学圣克鲁斯分校的数学教授，曾经说："这是楷模更替的一次楷模更替。

"在不很久以前的1960年，当我开始从事数学职业时，整个现代数学——我强调'整个'——都被物理学家们拒之门外，其中包括最先进的一批数学物理学家。于是微分动力学，整体分析，映象的流形，微分几何——只比爱因斯坦用过的数学前进了一两年的每一件事，都被拒绝了。数学家和物理学家之间的浪漫史在30年代以离异告终。他们彼此不再讲话。他们简直互相蔑视。数学物理学家们不许他们的研究生去上数学家讲的课程：'我们自己来上数学课。我们会把你们应当知道的东西教给你们。数学家们正在可怕地追求着某种个人成就，他们会搞乱你们的思想。'这是1960年的情况。到了1968年，形势就完全改变了。"最终，物理学家、天文学家和生物学家都知道自己必须接受新知识了。

木星大红斑之谜解开了

一个小小的宇宙奥秘：木星上的大红斑，它是一个广袤的椭圆旋涡，就像永不移动也永不消失的一场巨大风暴。任何人只要见过1978年由旅行者2号从太空发回的图片，就会认出那在巨大得无与伦比的尺度上的湍流的熟悉的外观。它是太阳系里最神圣的界碑之一，就像厄普代克曾经描述过的①，

> 红斑像一只痛苦的眼睛在呼号，
> 它处于沸腾双眉的湍流之中。

但那是什么呢？在洛伦兹、斯梅尔和其他科学家们开通了认识自然界流动的新路之后20年，木星上那种超凡的天气被证明为正是等待着随混沌科学而到来的对自然界种种可能性的新认识来加以解释的许多问题之一。

几乎在3个世纪里，情形一直是：知道得越多，懂得的越少。就在伽利略的望远镜第一次指向木星后不久，天文学家就注意到这个巨大行星表面上有一块瑕疵。胡克在17世纪初看到过它。克列提在梵蒂冈的画廊中为它画了像。作为一处配色点，这个红斑并没有要求多少解释。然而，望远镜越来越好，知识就产生出无知。上一个世纪里，接踵而至地产生了许多理论。例如：

① 见厄普代克的诗选《面向自然》(1985)，第74页。

岩浆流动说。19世纪后期的科学家曾经设想那是从火山中流出来的熔融岩浆形成的一个巨大的椭圆湖泊。也可能岩浆是从一个小行星撞击薄薄的星壳造成的孔洞中流出来的。

新月说。一位德国科学家根据对比提出，那是一个将离开行星表面的新的月亮。

鸡蛋说。有一个棘手的新事实：人们看到红斑在行星背景上慢慢飘移。因此1939年有人提出一种概念，认为红斑是在大气中飘浮的或多或少固化的物体，就像鸡蛋漂浮在水中一样。这一理论的变种，包括飘移氢气或氦气泡假说，曾经流行过一二十年。

气柱说。又有一个新事实：虽然红斑在飘移，不知怎么它总是飘得不远。于是在60年代有科学家提出，红斑乃是一个上升气柱的顶部，这气柱可能是从火山口中升起来的。

这时“旅行者”来到了。大多数天文学家曾认为，只要能在足够近处瞧一瞧，奥秘就会不复存在。果然，旅行者号靠近木星的飞行提供了令人眼花缭乱的新数据，然而归根到底，数据还是不够。1978年宇宙飞船所摄像片，揭示了强大的风暴和多彩的旋涡。从壮观的细节中，天文学家们看到红斑本身是像飓风一般的涡流系统，它把镶嵌在形成环绕行星的水平条带的东西风带中的云层排开。飓风是人们能够想出的最好描述，然而有几条理由使它不能成立。地球上的飓风是由湿气凝聚成雨时所释放出的热供给能量的；而大红斑没有这种潮湿过程来驱动。飓风按照气旋的方向转动，在赤道以上是逆时针，以下是顺时针，这是与一切地面风暴一致的。大红斑的转动方向与气旋相反。而最重要的一点是，飓风在几天之内就会消失。

同时研究“旅行者”号像片的天文学家们还意识到整个木星实际上是一团运动中的流体。他们曾经想寻求一个固体行星，周围环绕着纸一样薄的大气，就像地球一样。然而，即使木星有一个固体核心，无论它在哪里，也会远离表面。木星突然间变成了巨大的流体动力学实验，大红斑坐在那里不断地转动，完全不被周围的混沌所扰动。

于是红斑成了一种形态试验。科学家们看到的是他们的直觉允许他们看到的事情。一位把湍流看成随机和噪声的流体动力学家，是无法理解砥柱中流的稳定岛的。旅行者号使得已有的奥秘加倍难解，因为它同时显示了流体的小尺度性质，这些性质小得用地球上的最强大的望远镜也看不到。小尺度显示出快速的无组织化。旋涡在一天或更短时间内产生和消失。然而，大红斑却不受影响。是什么力量使它运动的呢？是什么因素使它保持它的位置的呢？

美国宇航局把这些像片保存在全国五六处档案库里。其中一处档案库在康奈尔大学。80 年代初期，年轻的天文学家和应用数学家马库斯的办公室就在这档案库附近。继“旅行者”号之后，马库斯是美国和英国五六位试图寻求模拟大红斑的方法的科学家之一。从人造飓风说中解脱出来之后，他们在别处找到了更为适宜的类比。例如，环绕西部大西洋的海湾洋流，以似曾相识的方式扭曲和分枝。它形成小小的波浪，这些波浪转变成纽结，再变成环，然后从主流中旋转离去，形成缓慢而持久的反气旋方向的涡旋。另一个例子来自气象学中称为“阻塞”的特别现象。有时高气压系统会离开海岸，连续几周或几个月地缓慢转动，而且与通常的东西流向背道而驰。阻塞现象破坏全球性的预报模型，但同时也为

预报员提供希望，因为它产生异常持久的有序性质。

马库斯一连数小时地观察美国宇航局的照片，包括人类初次登月壮举的照片和木星上湍流的照片。由于牛顿定律放之四海而皆准，马库斯用流体力学方程编了一个计算机程序。要掌握木星上的天气，意味着要写出与一颗暗星相似的一团稠密的氢气和氦气的规则。木星转动很快，地球上10小时它就转一周。自转产生强大的科里奥利力，这就是在游乐园里转动的木马台上走动时要把人推向一边的力。科里奥利力驱动着大红斑。

洛伦兹当年用他的小小的地球天气模型在打印纸上打出粗略的线条，而今马库斯使用远为强大的计算能力，把令人眼花缭乱的彩色图象集合起来。他最初只画一些轮廓线。很难看出情形如何。然后他绘制幻灯片，最后他把这些图象编制成动画片。这真是泄露天机。呈鲜艳的蓝色、红色和黄色的棋盘一样的转动涡旋的图案，最终汇合成一个椭圆形，神差鬼使般地再现美国宇航局根据实物所摄制的大红斑动画片。马库斯说："你看这个大尺度斑点，像一只欢乐的蛤蜊处在小尺度的混沌流动之中，而混沌流像海绵一样在吸收着能量。你还可以看到混沌海洋背景中细线状的结构。"

大红斑是一种自组织系统，它是由造成在它周围的不可预言的骚动的同样的非线性扭曲造成和调节的。这是一种稳定的混沌。

作为研究生，马库斯曾经学习过标准的物理学，求解过线性方程组，进行过设计得与线性分析相符的实验。那是在庇护下生活，但是非线性方程毕竟难于求解，所以为什么要浪费一个研究生的时间呢？他的训练就计划着要得到满意的

结果。只要把实验保持在一定限度之内，使得线性近似可以适用，他就会得到预期结果作为报偿。现实世界还是不可避免地要偶尔闯入生活，于是马库斯会明白他多年之后才意识到的东西就是混沌的标志。他会停下来说："哎呀，这个小毛病是怎么回事?"人们会告诉他："哦，那是实验误差，别伤脑筋。"

但是与许多物理学家不一样，马库斯最终学到了洛伦兹的教导，即一个决定性的系统可以产生比周期性多得多的行为。他知道应当去寻求不受约束的无序，他知道无序之中会出现结构的岛屿。于是他为大红斑问题带来了这样的理解，即复杂系统可以同时产生湍流和一致的结构。他得以在一门新学科初创时期参与工作，而这门新学科正在建立自己把计算机作为实验工具的传统。他还愿意把自己设想成一种新的科学家：首先不是天文学家，不是流体动力学家，也不是应用数学家，而是一位混沌专家。

4 生命的盛衰

一项数学发展的结果，应当不断地与我们对合理的生物行为的直觉相对照而加以检验。当这种检验揭示出不一致性时，就应当考虑下述可能性：

1. 形式的数学发展中犯了错误；

2. 初始假定不正确或者引入了过分的简化，或者两者都有；

3. 我们自己对生物世界的直觉不够准确；

4. 发现了一项新的透彻的原理。

——引自戈尔德《生物系统的数学模拟》

野生种群模型

贪食的鱼和美味的浮游生物。热带雨林中悬挂着不知名的爬行动物，鸟类在树叶构成的篷盖下滑翔，昆虫像加速器中的电子一样在嗡嗡鸣叫。在冻土地带，在大自然的血腥竞争中，田鼠和旅鼠的数目以规律的4年周期交替兴衰着。大千世界是生态学家的混杂的实验室，500万物种在巨釜中交互作用。或许是5,000万种？对此，生态学家们实际上一点儿也不知道。

20世纪的具有数学倾向的生物学家们建立了一门新学科——生态学，它把现实生活的噪声和色彩都剥离开而把种群数作为动力系统来处理。生态学家们使用数学物理的初等工具来描述生命潮流的兴衰进退。单个物种在食物有限的地方繁殖，几个物种为生存而竞争，传染病通过宿主群体而传播——这些都可以被孤立出来，即使在实验室中做不到，在理论生物学家的头脑中则一定可以。

混沌在70年代作为一门新科学而兴起之际，生态学家们注定要起特殊作用。他们使用数学模型，但他们一向知道这些模型只是沸腾的现实世界的贫乏近似。正是这种对局限性的清醒认识，使他们得以用离经叛道的方式认识到某些思想的重要性，而这些思想在数学家那里只被看作是有意思的稀奇玩物。对于一位生态学家来说，如果规则的方程可以产生不规则的行为，这已经有点意思。用于种群生物学的方程只不过是物理学家们用以描述世界的模型的初等对应。然而生命科学中所研究的现实现象的复杂性使物理实验室中的任何

事物都黯然失色。生物学家们的数学模型只是现实的漫画像，就像经济学家、人口统计学家、心理学家和城市设计师的模型在这些软科学企图为那些因时而变的系统的研究引入严格性时一样。人们的标准是不同的。在物理学家看来，洛伦兹方程组简单得实际上像是透明的。而在生物学家看来，洛伦兹方程已经无比复杂——它是三维的，连续可变的，而且是用解析方法不能处理的。

生物学家们不得不创立了一种不同的工作风格。数学描述与现实系统的对比也是按不同方向进行的。物理学家们在观察一个特定的系统（例如用弹簧耦合起来的两个摆）时，以选择合适的方程开始。他首先查阅手册，如果找不到，就试图从基本原理出发把方程推导出来。他懂得摆的原理，也懂得弹簧的作用。然后，如果做得到，他就求解方程。相比之下，一位生物学家永远也不能仅仅从思考特定的生物种群就简单地推导出恰当的方程来。他必须先搜集数据，然后试图找到可以产生类似结果的方程。如果把1,000条鱼投入食物有限的水池中结果会怎么样？如果再加进每天要吃两条鱼的鲨鱼，结果又如何？如果一种病毒以依赖于种群密度的速率致死和传播，结果又如何？科学家们把这些问题都理想化，以适用于简捷的公式。

这样做常常是有效的。种群生物学从生命的发展史确实学到了不少东西，例如捕食者与被捕食者如何相互作用，一个国家的人口密度变化如何影响疾病传播。如果某个数学模型是向上发展的，或达到平衡的，或最终消失的，生态学家们就可以猜测实际种群或传染病在其中表现出同样行为的环境条件。

一种有益的简化是用离散的时间间隔来模拟世界，就像表针每秒跳一格而不是连续滑动一样。微分方程描述随时间和缓变化的过程，但微分方程不易计算。较简单的“差分方程”可以用于在状态间跳跃的过程。恰好，许多动物种群就是以整齐的年度间隔而变化的。逐年变化往往比连续背景上的变化更重要。例如，许多昆虫和人类不同，有单一的繁殖季节，因而它们的世代并不交叠。为了猜测明年春天舞毒蛾的种群数，或下一个冬天麻疹的传染情况，生态学家们可能只需要知道今年的相应数字。一年一度的摹写所产生的只不过是系统复杂性的影子，然而在许多实际应用中，这种影子给出了科学家们所需的全部信息。

生态学用的数学比起斯梅尔的来，简直是小巫见大巫：只是一组好的工作规则，没有任何过于复杂之处。为了描述种群的年度变化，生物学家所使用的形式体系连高中生都极易掌握。假设明年的舞毒蛾种群数完全由今年的种群数决定，可以设想用一张表把所有的具体可能性都列举出来——今年有 31,000 只蛾子意味着明年将有 35,000 只，等等。也可以把今年的全部数字与明年的全部数字的关系作函数看待。明年的种群数 x 是今年的种群数的函数 F：$x_{明年}=F(x)$。任何一个特定的函数都可以画成曲线，把它总的形状立即显示出来。

对于如此简单的模型，考虑一个种群随时间的变化，就是取一个初始数值，然后一次又一次地套用同一个函数。为了定出第三年的种群，只要把函数用于第二年的结果，如此等等。种群的整个历史就可以通过这个函数迭代过程得到——这也是一个反馈环，每年的输出成为下一年的输入。反馈可以失去控制，就像扬声器的声音经过话筒反馈回去，很

快放大成不能忍受的号叫一样。反馈也可能产生稳定性，就像恒温器调节屋内温度一样：任何超过定点的温度导致降温，而任何低于该点的温度导致加热。

可能使用许多不同类型的函数。一种朴素的种群生物学模型可以假定一个函数，它使种群数每年按一定百分比增长。这是一个线性函数 $x_{明年}=rx$，它给出经典的马尔萨斯种群增长率，不受食物供应或道义约束的限制。参数 r 代表种群增长率。设它是 1.1，则如果今年的种群数是 10，明年就是 11。如果输入是 20,000，输出就是 22,000。种群数越升越高，就像长期按复利计息的储蓄存款一样。

在几代人之前，生态学家就明白他们应该做得更好一些。一位考虑池塘中实际鱼类的生态学家，就必须找到一个函数来粗略地反映生活现实，例如饥饿和竞争。当一种鱼繁衍众多时，食物就开始短缺。数量很少的鱼种群会迅速地增长。种群过大的鱼会减少。另一个例子是日本甲虫。每年 8 月 1 日到花园里去数一回甲虫数目。为了简单起见，忽略掉鸟类的捕食和甲虫疾病的流行，只考虑固定的食物供应量。少量甲虫会增殖，而大量甲虫就会把花园吃个精光，最后自己饿死。

在马尔萨斯的无限制增长模式中，线性增长函数一直向上发展。在更现实的模型中，生态学家需要带有附加项的方程，以期在种群数太大时限制增长。最自然的选择是这样的一个函数，它在种群数小时上升很陡，在种群数适中时增长速度降到零，而在种群数太大时急剧下降。不断重复这个过程，生态学家就可以观察种群达到它的长期行为——很可能是进入某种定态。一位生态学家成功地在数学天地中闯荡一番之后，就可能讲出大意如下的话：这是一个函数，这是代

表生殖率的变量，这是代表自然死亡率的变量，这是代表饥饿或被捕食导致的附加死亡率的变量，瞧，种群以这一速率增长，直到达到那样的平衡程度。

然而，怎样找到这样一个方程呢？许多不同的方程都可能起作用，可能最简单的是改一下线性的马尔萨斯方案，令 $x_{明年}=rx(1-x)$。这里 r 又是代表增长率的参数，它的值可以设置得或高或低。新的因子 $(1-x)$ 把增长限制到一定幅度内，因为当 x 上升时，$1-x$ 下降①。任何有计算器的人都可以取一个初值，取一个增长率，然后计算出下一年的种群数。

到了50年代，有好几位生态学家考察上面这个特定方程的一些变种，它本身被称为逻辑斯蒂差分方程。例如在澳大利亚，里克把它用于实际的渔业。生态学家们懂得，增长率参数 r 代表了模型的一个重要性质。这些方程借自物理系统，在这些物理系统中，这个参数代表加热量、摩擦力，或者别的某个乱七八糟的量。简单地说，它代表非线性。在一个池

---

① 在这个高度抽象的模型中，为了方便起见，把“种群”表示成0与1之间的一个分数，0表示绝种，1代表池塘中可以设想的最大种群。

开始时取任意的 r 值，例如2 7，以及初始种群0 2。1减去0 2是0 98，乘以0 02得0 0196。再乘上2 7得0 0529。那个很小的初始种群翻了一番多。取这个新种群数作种子，重复以上过程，得到0 1353。只要有一台廉价的可编程计算器，这个迭代过程就归结为一次次地重复按键。种群增长到0 3159，然后是0 5835，然后是0 6562——我们看到增长率减慢下来。随着饥饿压过生殖，种群降到0 6092。然后是0 6428，0 6199，0 6362，0 6249。这些数字看来像是在上下跳动，但越来越接近一个固定的数：0 6328，0 6273，0 6312，0 6285，0 6304，0 6291，0 6300，0 6294，0 6299，0 6295，0 6297，0 6296，0 6297，0 6296，0 6296，0 6296，0 6296，0 6296，0 6296，0 6296。成功了！

在用铅笔和纸或者手摇加法机的日子里，数值研究一直没有走得比上面的实例更远多少。

塘里，它可能代表鱼的生殖力，代表种群不仅会繁盛而且可能衰落的倾向（学名叫“生命潜能”)。问题在于，这些不同的参数值怎样影响变化中的种群的最终命运?明显的答案是，较小的参数值会使这个理想化的种群终止在较低的水平上。较大的参数值会导致较高的定态水平。这对于不少参数值是对的——然而并不尽然。像里克这样的研究者，当年肯定有机会试过更大的参数；当他们这么做的时候，一定曾经看到过混沌。

奇怪得很，计算出来的数字开始行为失常！这对于用手摇计算器工作的人实在是伤脑筋的事。当然，这些数字还没有无限制地增长，然而它们也不收敛到恒定的水平。虽然这些早期的生态学家中好像没有人有意向或毅力把这些不肯稳定下来的数字折腾个水落石出，但不论怎么说，只要种群数在上下跳动，生态学家们就假定它是在围绕着某种平衡背景振荡。平衡是件重要事。这些生态学家们就没有想到，不平衡也是可能的。

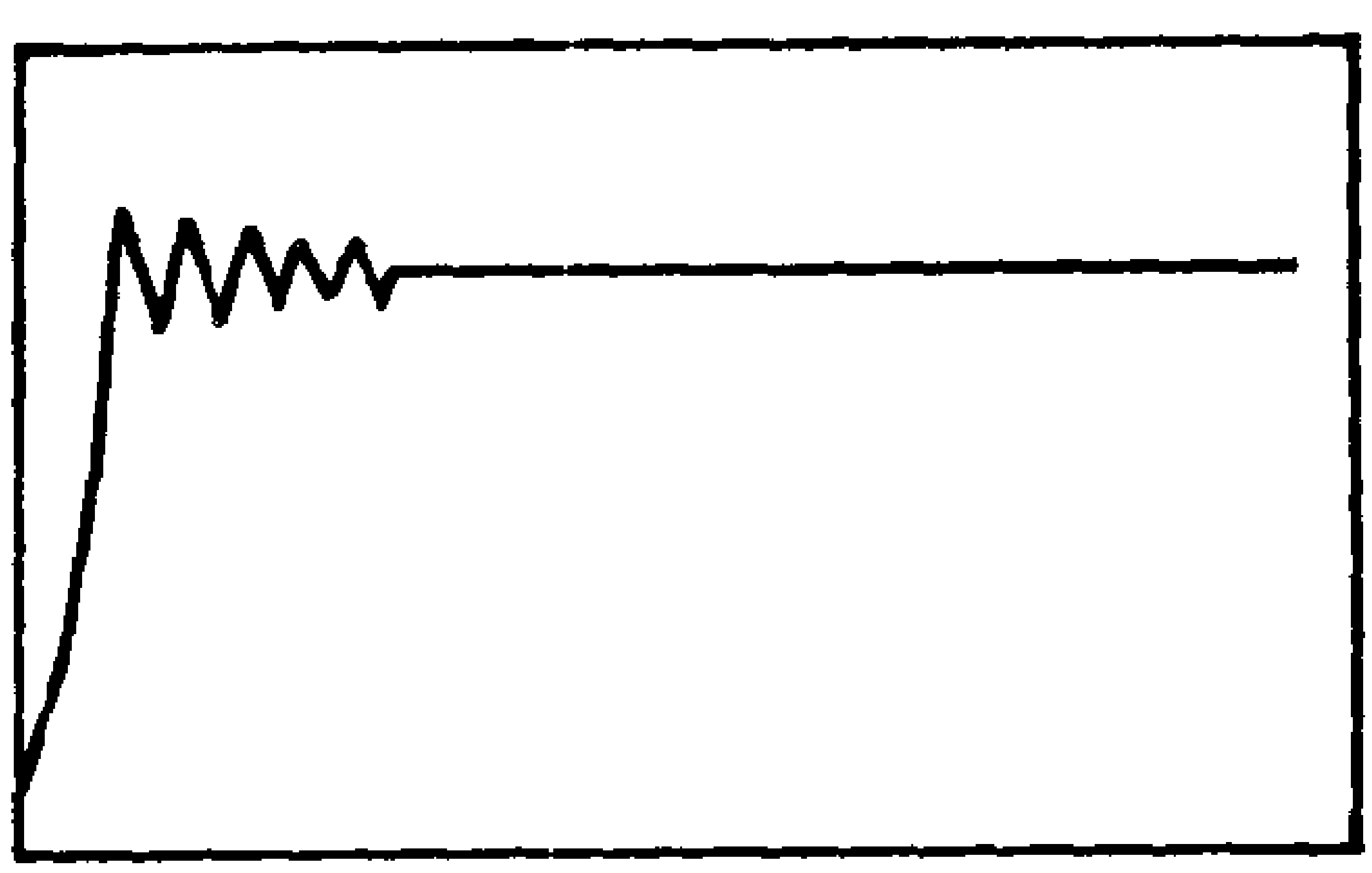


图 4 1　种群在上升、过头和下降之后达到平衡

有关逻辑斯蒂方程及其更复杂的同类方程的参考书和教科书，一般根本不提及有可能期望混沌行为的出现。史密斯在 1968 年出版的经典著作《生物学中的数学思考》中，对各种可能性给出的标准观念是：种群数往往近似为常数，或者“以相当规则的周期性”在一个假想的平衡点附近涨落。这并不是因为他天真地认为实际种群永远不会有无规行为。他只是假定在他所描述的那类数学模型中，根本说不上无规行为。不管怎么样，生物学家们必须与自己的模型保持一定的距离。如果这些模型开始背离制造模型者所理解的实际种群行为，那总可以用某个未曾计入的因素来解释分歧：种群中的年龄分布，有关领土或地理的某种考虑，或者因必须计及两种性别而引起的复杂性。

更重要的是，在这些生态学家的思想深处总有一条假定，即一串无规则的数字可能说明计算器在捣乱或者精度不够。只有稳定解才有意思。有序就是应有的报偿。归根到底，寻求合适的方程并且计算出解来乃是苦差使。任何人都不愿意在走上错误道路而不产生稳定结果的工作方向上浪费时间。加之，没有一位好的生态学家会忘记，自己的方程只是对实际现象过度简化的结果。过度简化的实质就是只模拟规则性。那为什么要自讨苦吃去找混沌呢？

非线性科学，“非象类动物的研究”

以后人们会说，是约克发现了洛伦兹，并且为混沌这门科学命名。这后一论断实际上是对的。

约克是一位喜欢把自己想象成哲学家的数学家，虽然承

认这点对数学职业有点危险。他才华横溢，说话温和，是有点不修边幅的斯梅尔的有点不修边幅的赞赏者。同别人一样，他感到斯梅尔高深莫测。但与大多数人不同，他知道斯梅尔为什么高深莫测。约克 22 岁那年加入了马里兰大学的跨学科的物理科学与技术研究所，后来成了所长。他属于那类感到必须使关于现实的思想能有所用的数学家。他写过一个报告分析淋病如何传播，使得联邦政府改变了控制这一疾病的国家战略。他在 70 年代石油危机时曾经正式在马里兰州议会作证，正确地（但是没有说服力地）解释，按单日双日限制售油的办法只会使队排得更长。在反战游行的岁月里，当政府公布了一张从间谍飞机上拍摄的像片，意在说明集会高潮时华盛顿纪念碑旁人群稀少，他分析了纪念碑影子，从而证明像片实际上是在大会散会后半小时才拍摄的。

在研究所里，约克有着异乎寻常的自由来研究传统领域以外的问题，他乐于和许多其他学科的专家们经常接触。这些专家中的一位流体动力学家，在 1972 年偶然发现洛伦兹 1963 年的“决定性的非周期流”一文，并且爱上了这篇文章。他为任何愿意要的人提供复印件，也给了约克一份。

洛伦兹的文章正是约克梦寐以求而又不知何所求的魔术。这首先是一次数学冲击——一个破坏斯梅尔最初的乐观分类方案的混沌系统。然而它不仅是数学；它是一个生动的物理模型，一张运动流体的图片。约克立刻就知道这正是他希望物理学家们能看见的东西。斯梅尔已经把数学指引到这类物理问题的方向，但是约克很清楚，数学语言仍然是互相交往的严重障碍。如果学术界里有数学和物理混血儿的生存余地，那情形会好得多，而事实上没有。虽然斯梅尔关于动

力系统的工作已经开始缩小这里的差距，数学家和物理学家们仍然各讲一种语言。物理学家盖尔曼曾经说过："系里的同事们都熟悉这样一种人，这种人在数学家们眼里是好物理学家，而在物理学家看来是好数学家。确切地说，他们并不愿意身边有这种人。"这两个行业的标准不同。物理学家们有定理，数学家们有猜想。他们的世界是由不同的对象组成的。他们举出的例子也不一样。

斯梅尔会乐于看到这样的例子：取 0 与 1 之间的一个分数，把它加一倍，舍去整数即小数点左面的部分。然后重复这一过程。由于绝大部分数都是无理数，它们具有不可预言的细节，上述过程也会产生不可预言的一串数码。物理学家会把这个例子当成陈腐的数学怪玩意儿，觉得毫无意义，过分简单和抽象，以致失去用途。然而，斯梅尔由直觉知道，这点数学招法会出现在许多物理系统的实质处。

对于一位物理学家，合法的例子是可以用简单形式写出的一个微分方程 当约克见到洛伦兹深埋在气象学杂志里的那篇文章时，他知道这是物理学家们可以理解的那种例子。他寄了一份复印本给斯梅尔，上面贴了自己的姓名地址，以便斯梅尔阅后归还。斯梅尔惊奇地看到这位气象学家早在 10 年前就发现了自己一度认为数学上不可能出现的一类混沌。斯梅尔复制了许多份"决定性的非周期流"，这样就产生约克发现了洛伦兹的传说。在伯克利出现的每一份复制本上都有约克的姓名地址。

约克感到，物理学家们学会了对混沌视而不见。在日常生活中，洛伦兹式的对初始条件的敏感依赖性比比皆是。一个男人早上离家晚了 30 分钟，一个花盆差几毫米没有落到他

头上，随后他被一辆卡车撞到。或者，少一些悲剧性，他没有赶上每10分钟一趟的公共汽车，结果误了每小时一班的火车。一个人日常轨道中的小小扰动可能留下巨大的后果。一位面对着投来的球的击球手知道，近似相同的一棒并不给出近似相同的结果，棒球本来就是咫尺之间定输赢的游戏。科学呢？科学毕竟有所不同。

从教育角度讲，物理学和数学的相当多的内容曾经是而且目前仍然是在黑板上写下微分方程，然后教给学生如何求解。微分方程把现实表示成连续一片，在时空两方面都和缓地变化，并不分成离散的网格点和时间步。每一位从事科学的学生都知道，求解微分方程并非易事。然而两个半世纪以来，科学家们已经构筑起关于微分方程的宏大的知识体系：微分方程的手册和目录，连同各种求解的方法，或者用科学家的话说，“寻求闭式积分”的方法。可以毫不夸张地说，正是微积分的应用促成了中世纪以来科学的大多数实际胜利；更不用说它本身就是人类试图模拟周围变幻世界时的最为精巧的创造。于是，正当一位科学家掌握了这套思考自然的方法，对于这种理论和它的艰辛实践感到满足之时，他很可能忽视一个事实：许多微分方程根本不可能求解。

约克说：“如果你能把一个微分方程的解写出来，它必定不是混沌的，因为你在这样做时必须找到规则的不变量，就是像角动量那样的守恒量。找到足够多的这种量以后，你才有可能写出方程的解来。而这恰恰是消除出现混沌的可能性的方法。”

可解系统就是教科书中指出的那些。它们循规蹈矩。科学家一旦面临非线性系统，就必须代之以线性近似，或者寻

求其他不确定的旁敲侧击。教科书中告诉学生们的非线性系统，也只是可以靠这种技术处理的极少几例。它们并不表现出对初始条件的敏感依赖性。人们很少讲授，很少学习具有真正混沌的非线性系统。当人们偶然遇到这类事物——他们确曾遇到过——时，以往的全部训练教他们把这些都当作失常情况而不予理睬。只有很少人能记得，原来那些可解的、有序的、线性的系统才是失常的。这就是说，只有很少人懂得自然界的灵魂深处是如何地非线性。费米有一回感叹道："《圣经》里并没有说一切自然定律都可以表示成线性的！"数学家乌勒姆评论说，把混沌研究称为"非线性科学"，好比是把动物学叫作"非象类动物的研究"。

约克懂得这一点。"第一个信息是存在无序。物理学家和数学家们都想发现规则性。人们说，无序有什么用处！然而，如果人们要跟无序打交道，他们就必须了解无序。不知道油门里的淤泥的汽车工是不称职的。"约克确信，无论科学家和非科学家，如果他们没有恰当地与复杂性取得协调，都很容易在有关复杂性的问题上误入歧途。为什么投资者坚持认为金银价格有循环？原因在于周期性乃是他们可能想象的最复杂的有序行为。当他们看到复杂的价格波动时，就企图找出包裹在小小的随机噪声中的某种周期性。而物理、化学、生物这些学科中的实验家们也并无不同。约克说："过去，人们曾在众多情形中看到过混沌行为。他们做某项物理实验，实验结果是不规则的。他们就试图修正它或放弃不干了。他们解释这些不规则行为时说有噪声存在，或声称实验做得不好。"

约克认定，在洛伦兹和斯梅尔的工作中有物理学家们还未曾听到的信息。于是，他为自己觉得可以投稿的传播最广

的杂志《美国数学月刊》写了一篇文章。(作为数学家，他无法把自己的思想表述成物理杂志可以接受的形式；只是在几年之后，他才找到了与物理学家们合作的窍门。)约克的文章是有重要价值的，然而最有影响的却是它那神秘的、恶作剧似的标题："周期3意味着混沌"[1]。同事们劝他选个更庄重的字眼儿，但他咬定了这个能代表正在成长的决定论无序整个事业的词。他还和自己的朋友、生物学家梅交谈过。

叉子分岔和施普雷河上游览

梅恰巧就是通过旁敲侧击的途径进入生物学的。他是一位有才华的律师的儿子，在家乡澳大利亚的悉尼开始学习理论物理，后来在哈佛大学做应用数学方面的博士后研究工作。1971年他到普林斯顿高等研究所去了一年，他没有做原来应该做的事，而是跑到普林斯顿大学去与生物学家们聊天

直到今天，生物学家仍倾向于不用超乎微积分的更多的数学。爱好数学而且有天赋的人们倾向于数理科学而不是生命科学。梅是一个例外。他的兴趣最初倾向于抽象的稳定性与复杂性问题，寻求使竞争对手可以共存的数学解释。但他很快就开始专注于最简单的生态问题，即单一种群在时间上的行为。无法回避地简化的模型看来折中得不够。当他永久性地转到普林斯顿大学生物系时(后来他终于成为大学的研究工作负责人)，他已经花了许多时间来研究逻辑斯蒂差分方程的一个变种，研究时使用数学分析和一台简单的手摇计算器。

---

[1] 这篇文章的合作者是李天岩——校者

事实上，有一次在悉尼的一个挂在走廊里的黑板上，他把方程写下来作为给研究生的习题。他开始感到烦恼，"天晓得，参数超过累积点以后会发生什么事?"这就是说，当种群增长率即种群的盛衰趋势超过临界值后会怎么样。在试用过不同的非线性参数值之后，梅发现他可以剧烈地改变系统的性质。加大参数意味着增高非线性的程度，结果不仅改变输出的数量，还改变它的性质。它不只影响种群数的最终平衡值，而且还决定种群究竟是否会达到平衡。

当参数值很低时，梅的简单模型趋向一个定态。当参数增高后，定态分裂开来，即种群数在两个交替值之间振荡。当参数值很高时，这同一个系统的行为看来不可预言。为什么?在这两类行为的交界处究竟发生了什么情况?梅说不清楚。(研究生也说不清。)

梅对这个最简单方程的行为进行了大量的数值探索。他的做法与斯梅尔相似：试图一举弄清这个简单方程的全部行为，不是局部地，而是整体地 这个方程比斯梅尔研究过的任何东西都简单得多。看来不可思议的倒是，这么久以来人们还未曾把它产生有序和无序的可能性研究穷尽。事实上就是没有穷尽。梅的计划只是一个开端。他研究了成百个参数值，使反馈环开始动作，然后观察这成串的数字在何处和是否趋向一个不动点。他越来越密切地注意定态和振荡之间的临界状态。就好像他自己有一个鱼塘，可以严密地控制鱼类的"盛衰度"。梅仍然使用逻辑斯蒂方程 $x_{\text{明年}} = rx(1-x)$，但却使参数尽可能慢地增长。如果参数是2.7，种群数将是0.6292。参数增高时，最终种群数也稍有增加，形成一条从左向右稍稍上升的曲线。

但是突然地，当参数超过了 3 时，曲线一分为二。梅想象中的鱼塘里的鱼群数目不再趋向单一数值，而是在不同年份交替地在两个点之间振荡。从一个低值开始，种群数将上升，然后涨落，直到在高低两个值之间不停地来回跳动。把参数再调大一点点，振荡将再次分裂，产生在 4 个不同值之间跳跃的一串数字，每 4 年周而复始[①]。现在种群数以 4 年为周期规则地升降。周期加倍了两次：先从 1 年到 2 年，再从 2 年到 4 年。最终的周期行为又是稳定的，从种群数的不同初值开始，却以相同的 4 年周期收敛。

就像洛伦兹 10 年前发现的那样，弄懂这些数字并且保护视力的办法是画一张图。梅画了一个草图把有关这个系统在不同参数值下的行为的全部知识总结出来。参数值画在水平方向，从左向右增高。种群数沿纵向表示。对于每个参数值，当系统达到平衡之后，梅画出代表最终输出的点。在左半边参数值较低处，这输出只是一个点，于是不同的参数值给出从左向右稍稍上升的一条曲线。当参数经过第一个临界点时，梅不得不画出两个种群数；曲线一分为二，形成一个横躺的 Y 字形或一个叉子。这次分裂对应于种群变化从 1 年周期变成 2 年周期。

当参数进一步增高时，点数再次加倍，然后一次次地再加倍。这真是令人目瞪口呆的发现，如此复杂的行为，然而

---

① 例如，参数是 3.5，初值是 0.4 时，可以看到如下一串数字：0.4000，0.8400，0.4704，0.8719，0.3908，0.8332，0.4862，0.8743，0.3846，0.8284，0.4976，0.8750，0.3829，0.8270，0.4976，0.8750，0.3829，0.8270，0.5008，0.8750，0.3828，0.8269，0.5009，0.8750，0.3828，0.8269，0.5009，0.8750，等等

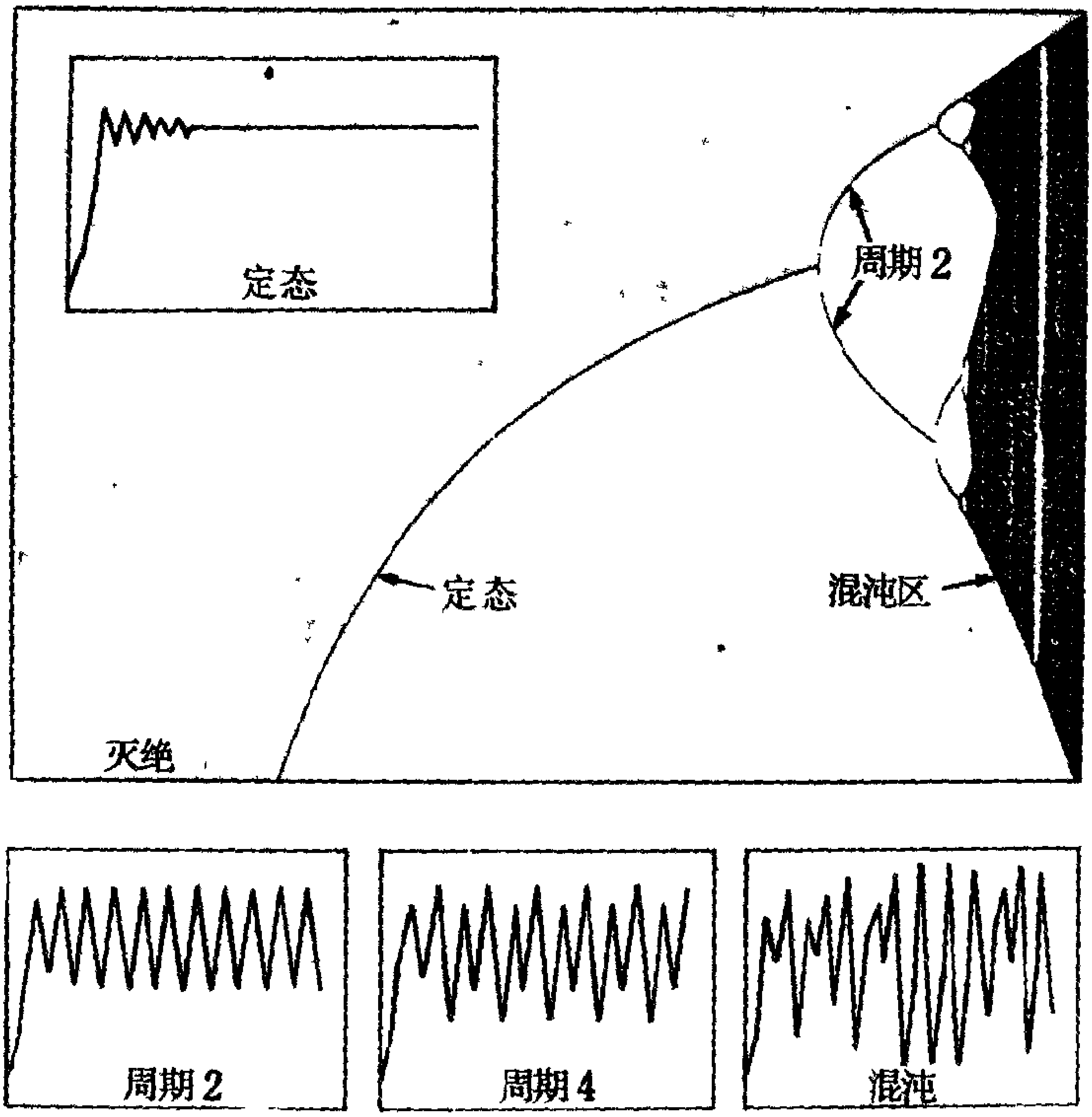


图 4 2　倍周期和混沌

梅和其他一些科学家不使用单个曲线来表示不同繁殖率下的种群行为，而是把所有的信息汇编到一张“分岔图”中。

这个图表明当一个参数（此处是某一野生种群的“盛衰度”）改变时，这个简单系统的最终行为会如何变化。参数值用横轴从左向右表示，而最终种群数用纵轴标出。在一定意义上，增高参数值意味着对系统施加更强的驱动，增大它的非线性。

当参数值很低时（左），种群灭绝。参数增高时（中），种群的平衡水平也增高。然后，当参数继续增高时，平衡值一分为二，就像在对流液体中增加热量造成不稳定一样；种群值开始在两个不同水平间

振荡。这种分裂或分岔出现得越来越快。最后系统成为混沌的（右），种群数经历着无穷多个不同值。（混沌区的放大图见图 4 3、4 4。）

又是如此引人入胜地有规则。梅把它描述成“数学草丛中的一条蛇”。加倍本身就是分岔，每次分岔说明原有的重复模式进一步分裂了。曾经是稳定的种群数将 2 年一度地在不同水平间振荡。曾以 2 年周期交替变化的种群数将在第三和第四年里改变，从而转入周期 4。

这些分岔越来越快——4，8，16，32，……，然后突然中断。在某一“累积点”之后，周期性让位于混沌，即一种永不落入定态的涨落。图中整块区域完全变黑。如果观察一个按这种最简单的非线性方程变化的动物种群，人们会感到年复一年的变化是绝对随机的，就好像完全被环境噪声搞乱一样。然而就在这复杂性之中，稳定的周期又突然回来。虽然参数在继续上升，说明非线性对系统的驱动越来越强，但是忽然会冒出来一个具有规则周期的窗口：一个像 3 或 7 这样的奇数周期①。这就是说，种群变化按照 3 年或 7 年周期重复。然后倍周期分岔以更快的速率全面开始，很快地经过 3，6，12，……或者 7，14，28，……这些周期，然后再次中断而进入新的混沌。

最初梅未能看到这整个图象。但他能够算出的一些片段已足以使人不安了。在现实世界的系统中，观测者每次只能看到对应于一个参数值的一段竖线。他只能看到一种行为——可能是一个定态，可能是 7 年周期，也可能是明显的随

① 也可能出现偶数周期。——校者

机。他根本无法知道，只要稍稍改变某一个参数，这同一个系统竟然会表现出完全不同的一类行为模式。

约克在他的“周期3意味着混沌”一文中，以数学的严格性分析了这种行为。他证明在任何一维系统中，只要出现规则的周期3，同一个系统也必然会给出其他任意长的规则周期，以及完全混沌的循环。这就是对于戴森这样的物理学家来说像“电击”一样的那种发现。它是如此与直觉相违。人们会以为很容易建立一个系统，它只会以周期3振荡而永远不产生混沌。约克表明这是不可能的。

不论这是多么怵目惊心，约克相信这一篇文章的公共关系价值会远远超过它的数学实质。部分说来，这是对的。几年后，在东柏林参加一次国际会议期间，他抽了点时间出去观光，并到施普雷河上去乘坐游艇。突然一位俄国人靠近他，急于想谈些什么。在一位波兰朋友帮助下，约克终于明白这位俄国人声称他曾经证明了同样的结果。他拒绝给出细节，只是说要把文章寄来。文章在4个月之后收到。这位萨尔柯夫斯基确曾在一篇题为“线段连续自映射周期的共存性”的文章中捷足先登。但约克提供的比数学结果还要多。他给物理学家们发了信息：混沌无往而不在；它是稳定的；它是有结构的。他也给出了理由来使人们相信，传统上用艰难的连续微分方程模拟的复杂系统，有可能靠容易的离散图去理解。

这两位沮丧的、在观光时相遇互相打着手势的数学家，是苏联和西方科学间长期连续隔阂的表现。部分由于语言困难，部分由于苏方的旅行限制，一些老练的西方科学家曾经多次重复过苏联文献中已有的结果。美国和欧洲的混沌旺季，在苏联诱发了大量的并行工作；但另一方面，它也诱发了相当程

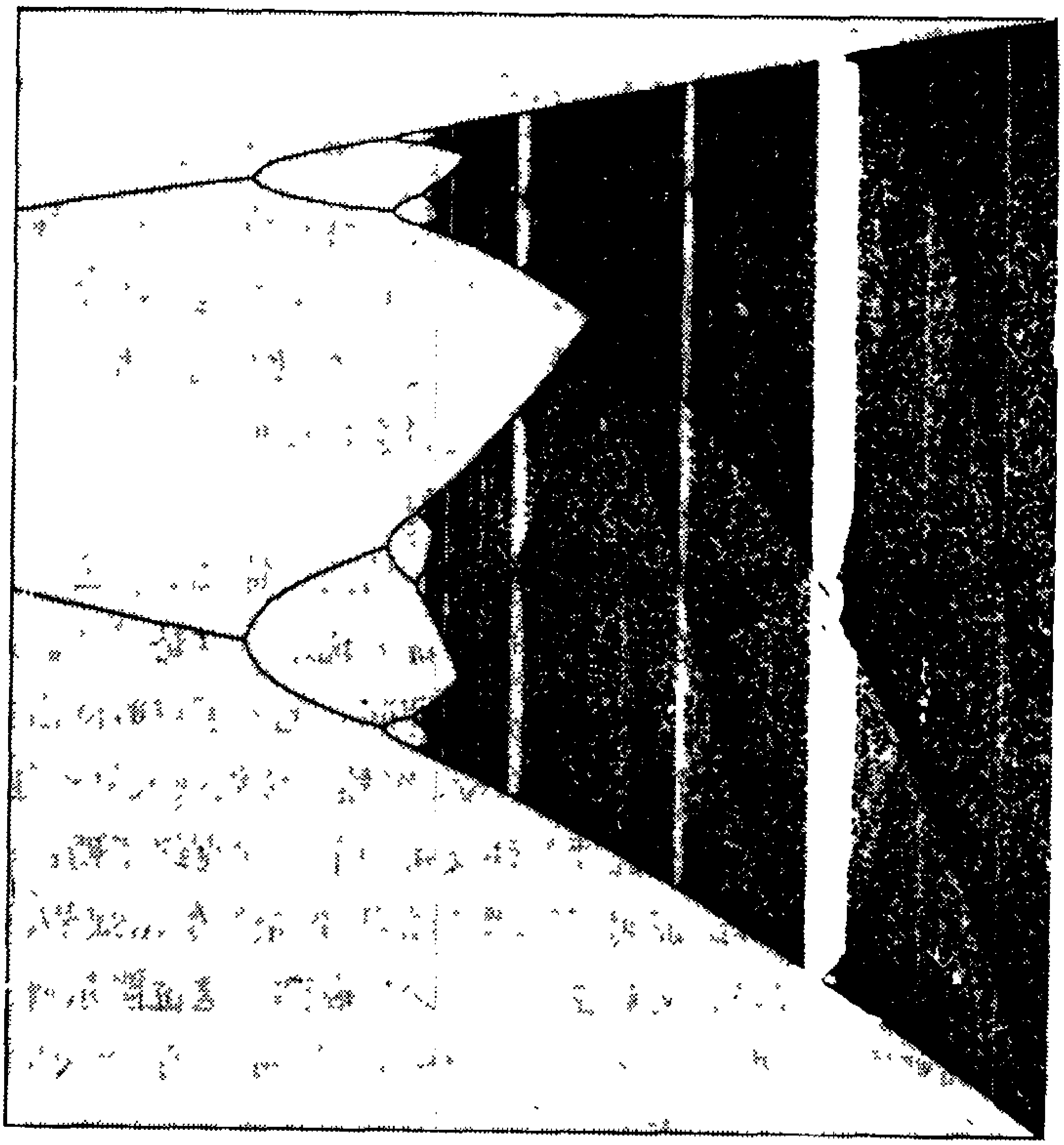


图 4 3 混沌中的有序

即使是最简单的方程，一个分岔图中的混沌区也具有错综复杂的结构——比梅最初所能猜测的远为有序。这些分岔首先产生周期 2，4，8，16，……。然后混沌开始，没有规则的周期。但在此后，当系统被加强驱动后，出现奇数周期的窗口。出现一个稳定的周期 3（见放大图 4 4 上图），然后又开始倍周期过程：6，12，24，……。这种结构具有无穷的纵深。任何小部分被放大后，看起来都与整个图相像（例如周期 3 窗口的中间一小段，见图 4 4 下）。

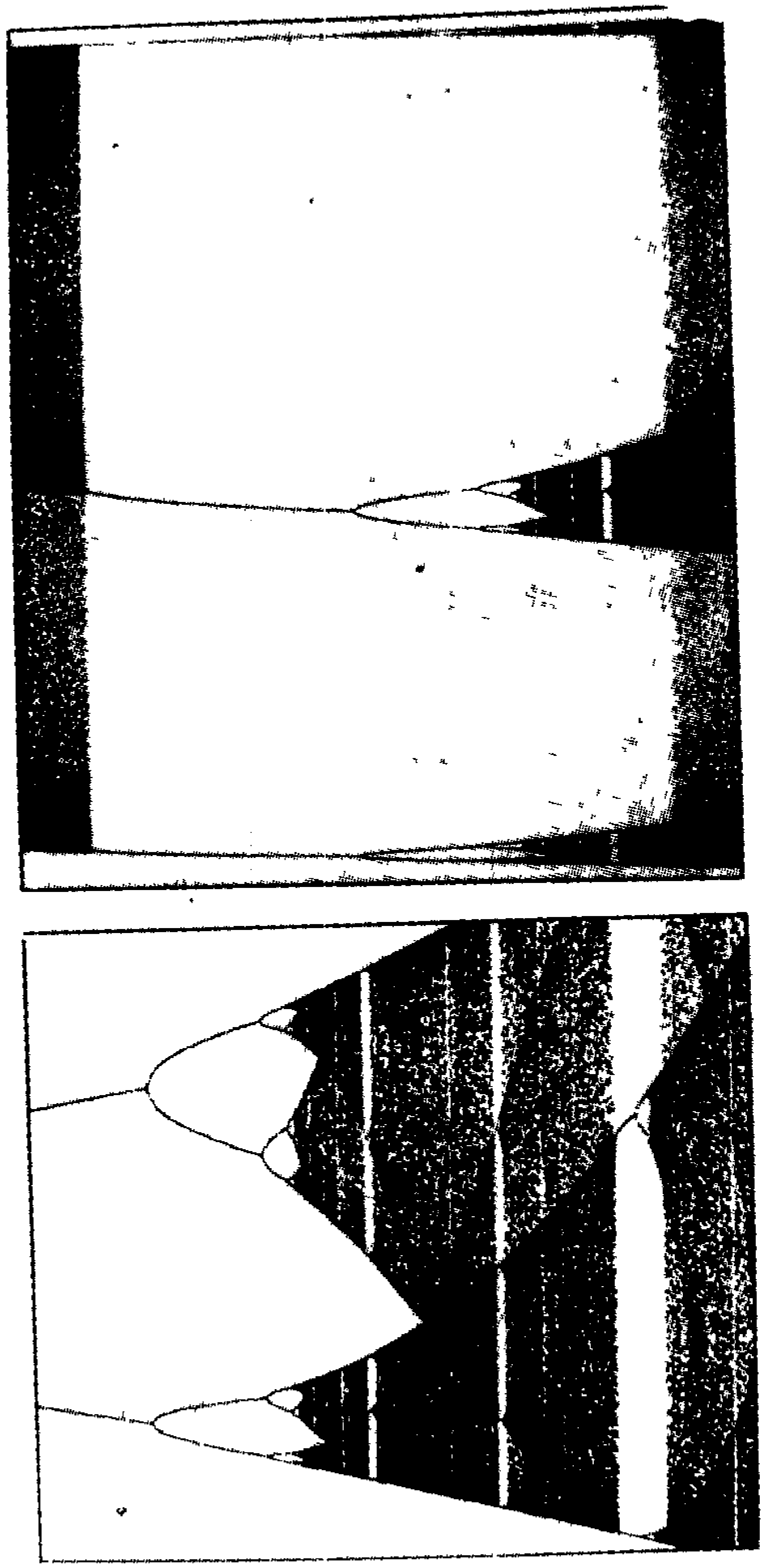


图4 4

度的迷惑不解，因为新科学中的不少内容对莫斯科已不算新鲜。苏联数学家和物理学家们具有很强的混沌研究传统，这要追溯到50年代柯尔莫果洛夫的工作。除此之外，他们还有共同合作的传统，这就胜过了其他地方数学和物理的互相分离。

这样，苏联科学家就易于接受斯梅尔的思想——他的马蹄在60年代引起了相当大的轰动。一位有才华的数学物理学家西奈迅速把相似的系统翻译成热力学的语言。类似地，当洛伦兹的工作在70年代最终抵达西方物理学界时，它同时也在苏联得到传播。1975年，当约克和梅努力吸引他们同事的注意时，西奈和另一些人很快地聚集起一个以高尔基城为中心的强大的物理学家工作小组。近年来，某些西方混沌专家坚持经常到苏联旅行以跟上潮流，然而更多的人只好满足于这门科学的西方形式。

在西方，约克和梅是最先感受到倍周期全面冲击的人，也是他们最先把这一冲击传给科学界。曾注意到这一现象的几位数学家只把它当成技术事项，数值怪异，或几乎是一种游戏。他们并未视若寻常，但都认为是自己小天地里的私事。

生物学家们忽视了通向混沌之路上的分岔，是因为他们缺乏数学经验，也因为他们缺少探索无序行为的动力。数学家们看到了分岔，但是都走过去了。梅，作为在两个世界中各踩一只脚的人，明白自己正在进入一个新奇而深刻的领域。

混沌电影和救世呼吁

为了更深入地了解这个最简单的系统，科学家们需要更强大的计算能力。纽约大学库朗数学研究所的霍本斯台特

有一台能力很强的计算机，于是他决定制作一部电影。

霍本斯台特是一位后来对生物问题发生浓厚兴趣的数学家，他把逻辑斯蒂非线性方程在CD6600计算机上算了几亿次。他调整了成千个参数值，在计算机显示屏上把每个参数的图画出来：出现分岔，然后是混沌，接着在混沌区里是小小的有序花穗，如昙花一现般地不稳定。少量周期行为转瞬即逝。凝视着自己的影片，霍本斯台特感到像是在异域飞翔。某一瞬间看来完全不混沌，下一瞬间又充满了不可预言的骚动。那种惊奇之感使霍本斯台特永远不能忘怀。

梅也看到了霍本斯台特的电影。他还开始从其他领域搜集类似的例子，这些领域包括遗传学、经济学和流体动力学。作为宣传混沌的大声疾呼者，他比纯数学家有两个优越性。首先，他知道这些简单方程不能完全代表现实。他知道它们不过是一些隐喻——于是他开始关心这些隐喻究竟可以应用到什么程度。其次，混沌的展现直接涉及他自己领域里的尖锐矛盾。

种群生物学早就是矛盾汇聚之处。例如，在生物系内部，分子生物学家和生态学家们有时候就关系紧张。分子生物学家们觉得自己从事的才是真正的科学，是干净利落的难题，而生态学家们的工作却是含糊不清的。可生态学家们确信，分子生物学中的高超技艺不过是重新提出早有完好定义的问题而已。

按照梅的见解，70年代初期生态学内部的一个中心矛盾与种群变化的本质有关。生态学家们几乎是按个性不同而分道扬镳的。有些人从大自然的信息看到有序：种群是受到调节而恒定的——同时也有例外。另一些人则得到相反的信息：

种群在无规则地涨落——当然也有例外。毫不偶然，这两大对立阵营在如何把艰难的数学用于杂乱的生物问题方面也是有分歧的。那些相信种群恒定的人，认为种群必受某种决定论机制的调节。那些确信种群无规则的人则争辩说，它们是由不可预言的环境因素所制约，根本排除任何决定论信号的存在。或者是决定论的数学产生恒定行为，或者是随机的外噪声产生随机行为。两者必居其一。

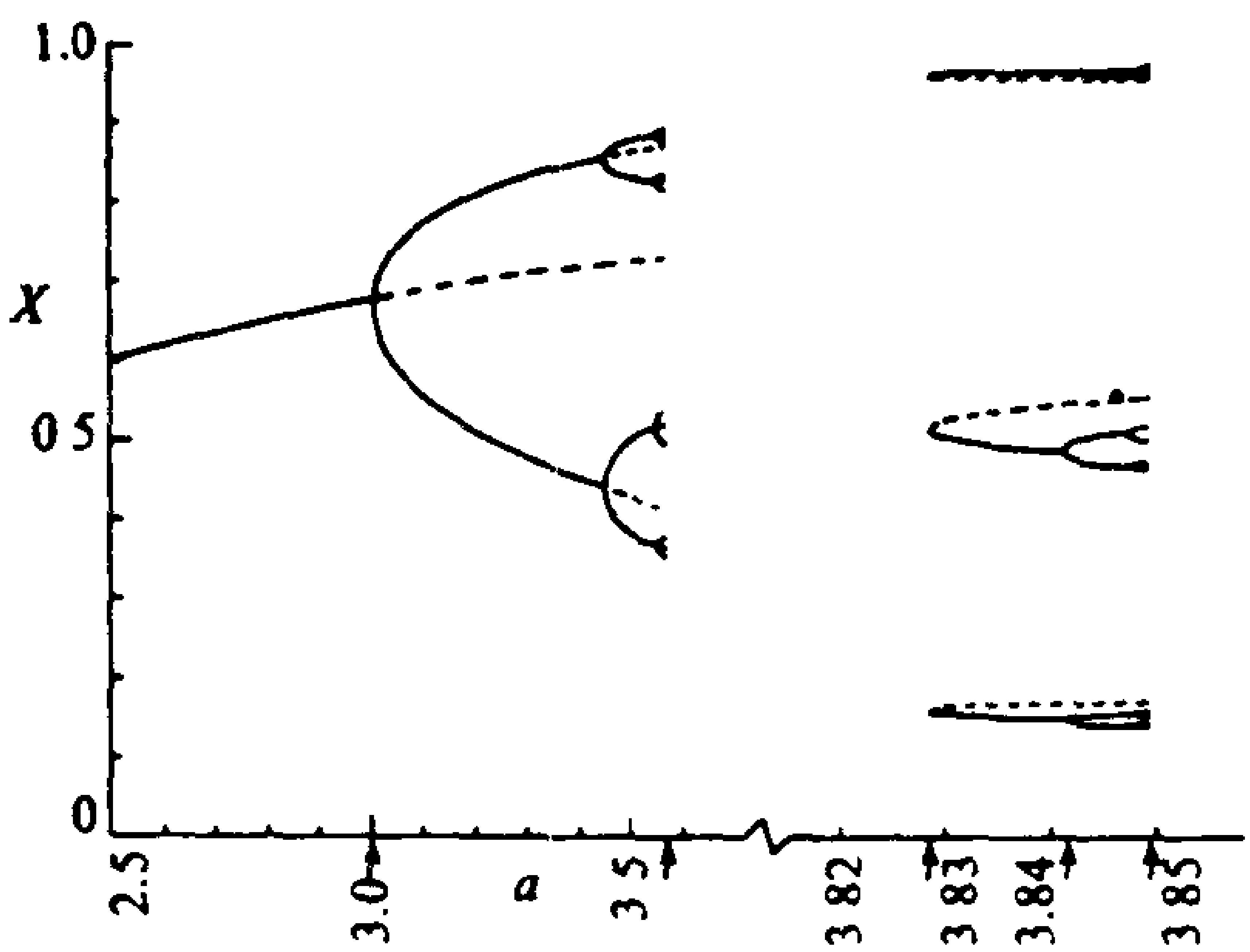


图4 5

梅第一次看到的分岔图轮廓，这是在更强大的计算揭示出它的丰富结构之前。

对于这一争论而言，混沌带来了出乎意料的信息：简单的决定论模型能产生貌似随机的行为。这种行为实际上具有精巧的细微结构，不过它的每一小块看起来都与噪声不可区分。这一发现把矛盾从当中切开。

当梅通过简单混沌模型的棱镜，观察越来越多的生物系统时，他继续看到那些破坏实际工作者标准直觉的结果。例

如在流行病学中，人们熟知，流行病是按规则或不规则的周期发生的。麻疹、小儿麻痹症、风疹——全按一定的频率起落。梅意识到这些振荡是可以用非线性模型再现的，而他关心的是如果这种系统受到突然刺激——例如一项预防接种计划所引起的那类扰动，结果会如何。天真的直觉认为系统将平滑地朝所希望的方向转化。而事实上，梅发现很可能会出现大起大落。即使长期趋势被转变成大大下降，那走向新平衡的过程也会被意外的高峰打断。事实上，例如在英国消灭风疹运动的现实数据里，医生们确实发现过梅的模型所预言的那种振荡。然而任何主管卫生的官员，只要看到风疹或淋病的短期猖獗，就会认为接种计划遭到了失败。

在几年内，混沌研究就给予理论生物学以强有力的推动，使生物学家和物理学家成为几年前不可能设想的学术伙伴。生态学家和流行病学家们发掘出早年科学家们认为难以控制、无法运用而弃置的古老数据。在纽约市麻疹流行病记录中，以及哈得孙海湾公司的捕猎者们关于加拿大猞猁狲种群涨落的 200 年记录中，都发现了决定论的混沌。分子生物学家们开始把蛋白质看作处于运动之中的系统。生理学家们也不再把器官看成静态结构，而看成规则和不规则振荡的复合体。

梅知道，在全部科学中，专家们都曾看到和讨论过系统的复杂行为。每一门学科都考虑自身特殊牌号的混沌。这种思想使人失望。然而，如果明显的随机能来自简单的模型，将如何呢?如果同一些简单模型可以用于不同领域的复杂行为，又将如何呢？梅意识到他刚刚开始探索的这些惊奇结构，与生物学并无内在联系。他想知道有多少其他领域的科学家会

同他一样感到激动。于是他着手撰写那篇最终被自己想象成“救世箴言”的总结文章，并于1976年在《自然》杂志上发表。

梅争辩说，如果给每位年轻学生一架袖珍计算器并且鼓励他们去玩一玩逻辑斯蒂差分方程，这世界会变得更好。他在《自然》杂志上那篇文章里详细叙述的简单计算，就会抵消那些来自标准科学教育的关于世间各种可能性的曲解。它会改变人们思考一切问题的方法，从商业循环的理论到谣言的传播。

他主张在学校里讲授混沌。到了应当承认科学家的标准教育给出错误印象的时候了。梅争辩说，不管包括傅立叶变换、正交函数、回归技术的线性数学如何成功，它不可避免地把科学家引入歧途，因为在世界上压倒一切的是非线性。他写道：“这样发展出来的数学直觉，不能正确地把学生武装起来，使之能面对最简单的离散非线性系统所表现出来的稀奇古怪的行为。

“不仅在研究工作中，而且在每日每时的政治经济生活里，如果有更多的人明白简单的非线性系统并不必然具有简单的动力学性质，那我们大家的日子都会好过得多。”

5 自然界的几何学

而相互关系在显现出来，
像沙滩上的云影，
像远山边的地形，
小小的关系在展开。

——引自史蒂文斯的“混沌鉴赏家”

关于棉花价格的一个发现

在曼德勃罗的脑海中，一幅现实世界的图画在漫长岁月中形成。在1960年，它是一种思想的闪现，一幅不清晰的未聚焦的映象。然而，曼德勃罗只要看见它就会认出来，当时它就在霍撒克办公室的黑板上。

曼德勃罗是一位多面手数学家，他在国际商用机器公司里搞纯研究的一翼中找到了庇护所。他曾经涉猎经济学，研究一种经济模式中高低收入的分布。哈佛大学的经济学教授

霍撒克曾经请曼德勃罗去做一次报告，当他到达哈佛大院以北的雄伟的利塔沃经济中心大厦时，大吃一惊地发现自己的新发现已经绘制在那位老人的黑板上。曼德勃罗不无怨气地开玩笑说："我的图怎么能在做报告之前就画出来呢?"但霍撒克并不懂得曼德勃罗在说什么。黑板上的图与收入分布毫无关系；它表示的是 8 年里的棉价变化。

从霍撒克的观点来看，这张图也有些奇怪之处。经济学家们一般假定，像棉花这样的商品的价格按着两种节拍跳动，一种有序，一种随机。就长时间而言，价格稳定地被经济中的实际力量驱动着——新英格兰纺织业的盛衰，或者新的国际商路的开通等等。在短期中，价格会多少有点随机地上下跳动。不幸的是，霍撒克的数据与他的期望不符。大的跳动太多。当然，多数价格变化是小的，但大小变化的比值却不像他所期望的那样高。分布的下降不够快。它有一个长尾巴。

绘制变动图的标准模型过去是，现在仍然是那种钟形曲线。在钟形的隆起中心，大多数数据聚集在平均值附近。在两边，高低两个极端都迅速降下去。统计员使用钟形曲线，与内科医生使用听诊器一样，都是作为首要工具。它代表着事物的标准分布，所谓高斯分布，或者叫正态分布。它是关于随机行为的本质的一个说明。关键在于，事物变动时总是力图聚集在平均值附近，同时以一种恰当地和缓的方式对平均值有所偏离。然而，为了在经济荒野中指明道路，这些标准概念仍然缺了点什么。就像诺贝尔奖获得者列昂锡夫所说的："没有一个经验研究领域会用如此巨大而复杂的统计机器得出这样低质量的结果。"

不管怎么绘制自己的曲线，霍撒克都无法使棉价变化符

合钟形线的模型。但是它们构成的这种图形的轮廓，曼德勃罗正好在彼此毫不相干的地方开始看到。与许多数学家不同，他面对各种问题时总是依赖自己对图案和形状的直觉。曼德勃罗怀疑数学分析，但相信自己脑袋中的图象。他已经有一种想法，即一些行为不同于正态分布的定律，可能在统治着无规则的随机现象。当他回到纽约州维切斯特县北部山区约克镇高地国际商用机器公司的巨大研究中心时，已经带回了一盒霍撒克棉花数据的计算机卡片。接着他写信到华盛顿的农业部去索要 1900 年以来的更多数据。

在人
类的经验中，
误差的正态分布是自
然哲学的最深远的推广之一
它在理科　社会科学、医学　农业和
工程研究中都是一种指导手段。它是分析和
解释人们通过观察和实验而得到的基本数据时不可或缺的工具。

图 5 1　钟形曲线

像其他领域的科学家一样，经济学家们也已经跨越计算机时代的门坎，他们慢慢地意识到自己有能力搜集、组织和处理过去不可能想象的大规模数据。不过，并非一切信息都可以得到，能搞到的信息也需要变成某种可以使用的形式。键控穿孔的时代也还刚刚开始。在硬科学里，研究者们觉得比较容易积聚成万上亿个数据点。经济学家和生物学家一样，都在对付一个有意志的活物的世界。经济学家们所研究的又是一切生物中最难以捉摸的。

然而，经济学家的环境至少能源源不断地产生数据。在曼德勃罗看来，棉价是一种理想的数据源。记录是古老而完备的，已延续了一个多世纪之久。棉花又是具有集中市场（因而有集中记录）的买卖对象，因为在本世纪初，所有的南方棉花都经过纽约转销到新英格兰①，而利物浦的棉价也与纽约相关。

虽然经济学家们在分析商品或股票价格时走不了多远，但这并不是说他们缺少对于价格变化的基本看法。相反，他们有若干信条。信条之一是小的瞬间变化与大的长期变化毫无共同之处。快涨落是随机到来的。在一昼夜交易期间发生的小尺度上下只是不可预言、没有意义的噪声。然而，长期变化就完全不能同日而语。价格在累月成年乃至几十年期间的广泛摆动是由深刻的宏观经济力例如战争或衰退的趋势决定的，这些力在原则上应能理解。一方面是短期涨落的嗡嗡细声，另一方面是长期变化的明确信号。

然而，在曼德勃罗正在发展的现实世界中，没有这种二分法的容身之处。他的图象不是把大小变化分开，而是把它们束在一起。他不是在特定的一个或另一个尺度上寻求模式，而是跨越每一个尺度。他毫不清楚怎样画出自己心目中的图象，但他明白这里应当存在某种对称，不是左右或上下对称，而是大小尺度之间的对称。

果然，当曼德勃罗把棉价数据送进国际商用机器公司的计算机之后，他发现了所寻求的惊人结果。从正态分布角度产生偏差的数字，从尺度变换的角度却给出了对称。价格的

① 美国东北部的几个州通称新英格兰。——译者

每一次特定的变化是随机和不能预言的。但成串的变化又是与尺度无关的：价格的日变化和月变化曲线完全一致。不可思议的是，按曼德勃罗的办法分析下来，在经历两次世界大战和一次大萧条的60年动荡岁月中，价格变动的程度保持不变。

在大量无序的数据里竟然存在着一种出乎意料的有序。曼德勃罗自问：考虑到所考察的数字的任意性，还会有任何规律存在吗？为什么它对于个人收入和棉价同样适用呢？

说实话，曼德勃罗的经济学背景和他与经济学家们打交道的能力都是很贫乏的。在他发表所得结果的文章前面，由他的一位学生加了一篇解释文字，把曼德勃罗的材料用经济学家的语言复述出来。后来曼德勃罗转向其他感兴趣的事。但他同时有了探索尺度现象的日益增强的决心。这看来成了一种独特的品质，一种深刻的印迹。

逃离布尔巴基[1]的难民

许多年之后，当有人在曼德勃罗演讲之前向听众作完介绍（“……在哈佛大学教过经济学，在耶鲁大学教过工程学，在爱因斯坦医学院教过生理学……”）时，他不无骄傲地说：“当我听到过去从事过的一连串职业时，就经常怀疑自己是否存在。这些集合的交集肯定是空的。”诚然，从他早期在国际商用机器公司的日子算起，曼德勃罗并不成功地在一长串领域中存在下来。他始终是局外人，在数学的不时髦的角

① Bourbaki，一群法国数学家的集体假名。——校者

落里持着非正统的看法，探索着一些并未使他受欢迎的学科，为了把文章发表出去不得不把最伟大的思想隐藏起来，主要靠着约克镇高地雇主的信任才得以存活。他对像经济学这样的一些领域搞过突击，然后又撤走，留下一些招惹性的想法而缺少论据充分的工作。

在混沌的历史中，曼德勃罗也在走自己的路。但是1960年在他头脑中开始形成的现实世界的图象，已经从一种怪物发展成羽翼丰满的几何学。对于那些继续发展洛伦兹、斯梅尔、约克和梅这班人的工作的物理学家们，这位不合群的数学家仍然像在玩一场杂耍，然而他的技术和语言已经成为他们的新科学的不可分割的一部分。

上面这样的描述会使许多人觉得不贴切，这些人只在近一些年才认识曼德勃罗，知道他自命不凡，而且有一大串头衔和荣誉，其实要更好地理解他，就必需知道他曾是一位难民。他于1924年出生在华沙的一个立陶宛犹太家庭中，父亲是成衣批发商，母亲是牙医。鉴于地理政治的现实，这个家庭在1936年迁往巴黎，部分的原因是他的叔叔、数学家佐列姆·曼德勃罗在那里工作。战争来临时，这一家人又赶在纳粹分子前面一步，扔弃了全部财物，只带着几只箱子拥到巴黎以南塞满道路的难民流中。他们最终到达了蒂勒镇。

他当了一阵子机床维修学徒工，由于高高的个子和受过教育的背景而危险地遭受过怀疑。这是充满难以忘却的景象和恐惧的年月，然而他后来很少回忆起个人的艰辛，却始终记得在蒂勒和其他一些地方与学校老师们成为朋友，这些人中有几位本身就是由于战争而流落的杰出学者。总的说来，他受的教育并不正规，时断时续。他自己说从来没有学过字母

表，或者更值得注意的是，没有学过5乘5以上的乘法表。然而，他是有天赋的。

巴黎解放之后，他虽然缺乏准备，却通过了高等师范①和高等工业学院的长达一个月的口试和笔试。除了其他科目外，考试还包括一场不完全的绘画课，曼德勃罗在临摹维纳斯雕像时表现出了一点潜在的灵巧。在数学考试——形式代数和综合分析练习方面，他成功地靠几何直觉遮掩了自己的缺乏训练。他已经意识到，不管给出什么解析问题，他几乎总是可以用脑海中的形状来加以思考。给出一个图形，他可以设法变换它，改变它的对称，使它更为和谐。往往他的变换直接导致类似问题的解。在物理和化学中，因为不能应用几何，他的分数不高。然而在数学里，那些他用正规技巧永远无法解答的难题，却在他的图形处理中化解了。

高师和高工是在美国教育制度中所没有的高等学府。它们合在一起，每个年级为法国大学和政府部门培养不到300人。曼德勃罗开始上高师，这是两所学校中较小而更有声望的一所，但几天后就转到高工。他已经是一个逃离布尔巴基的难民。

恐怕只有在法国这块喜爱有权威的科学院和公认的教育法规的土地上，才能产生布尔巴基。它是从一个俱乐部开始的。在第一次世界大战后动荡不定的年代里，佐列姆·曼德勃罗和其他少数无忧无虑的年轻数学家建立了这个俱乐部，以寻求重建法国数学的道路。凶残的战争人口学在大学教授和大学生之间留下了一个年龄空当，中断了学术连续性的传

① 巴黎高等师范，名字很谦逊，但却是法国的最高学府。——校者

统，这些有才华的年轻人就着手去建立数学实践的新基础。这个团体的名字本身就是一个内部玩笑，它取自19世纪的一位希腊血统的法国将军，据以后猜测，以此为名就是由于它那奇怪而吸引人的发音。布尔巴基就这样带着很快消失的玩笑性诞生了。

它的成员们秘密聚会。事实上，不是所有人的名字都为人所知。人数是固定的。当一位成员满50岁而按规定离去时，剩下的人就另选一位。他们是数学家中最优秀和最有生气的，他们的影响很快波及整个大陆。

部分说来，布尔巴基是作为庞加莱的一种反作用开始的。这位19世纪末的伟人，非凡多产的思想家和作家，比其他一些人更少关心严格性。庞加莱会说，我知道这必然是对的，为什么我应当证明呢？布尔巴基确信庞加莱为数学留下了不稳定的基础，于是这一群人开始写一部浩瀚巨著，而且越写越具有狂热的风格，目的是要把整个数学理顺。中心是逻辑分析。一位数学家应当从坚实的基本原理出发，演绎地推出其他一切。这一群人强调数学是一切科学之首，并且坚持与其他科学分离。数学就是数学——它不能靠对实际物理现象的应用来评价。而首要的是，布尔巴基拒绝使用图形。数学家总可以被自己的视觉器官所愚弄。几何学不值得相信。数学应当纯粹、形式和严肃。

这并不是纯属法国的动向。在美国也有一批数学家坚定地要摆脱物理科学的要求，就像艺术家和作家要摆脱流行趣味的要求一样。一种与世隔绝的情感在流行。数学家的对象变成自足的，他们的方法成了形式公理方法。一位数学家可以骄傲地宣称他的工作并不解释世界上或科学里的任何东

西。这种态度带来不少好处，数学家们是珍惜这一点的。就是在努力使数学和自然科学重新联合起来的日子里，斯梅尔也深信数学应当自成一体。自足带来明晰。而明晰也是与公理法的严格性比肩而行的。任何严肃的数学家都明白，严格性是这一学科的力量所在，是支撑整个大厦的钢架。严格性使数学家们得以沿着绵延若干个世纪的思路，有保证地继续前进。

尽管如此，严格性的要求还是为20世纪的数学带来了意外的后果。这一领域是经历一类特别的演化而发展的。研究者提出一个问题后，从决定继续研究的道路开始工作。这种决定往往涉及两条道路的选择，一条在数学上可行，而另一条从理解自然界的角度看来更有兴味。对于一位数学家来说，选择是明确的：他会暂时放弃任何与自然界所有的明显联系。他的学生们有朝一日也会面对类似的选择，并作出类似的决定。

没有一个国度像法国那样把这些价值观奉为金科玉律，而布尔巴基在此获得了它的创始者们想象不到的成功。它的规则、风格和记法成为一种指令。它由于控制了所有最优秀的学生和不断产生出数学成果而获得无可争辩的正确。它在高师的统治是绝对的，而对曼德勃罗来说是不能容忍的。他由于布尔巴基而逃离高师，10年后他由于同样的原因而离开法国到美国居住。几十年之内，布尔巴基的无情的抽象将在计算机的冲击下开始消亡，计算机的威力将哺育出肉眼可见的新数学。但这对于曼德勃罗来说是太迟了，他无法在布尔巴基的形式主义下生活，也不愿放弃自己的几何直觉。

传输误差和参差不齐的海岸线

曼德勃罗总是本人所造神话的信徒，他在名人录《谁是谁》中自己的名下加了这样一段话："如果（和体育一样）把竞赛置于一切之上，如果为了阐明竞赛规则而退缩到狭隘定义的专业中去，科学就会毁灭。对于已经确立的学科的理性利益，那些少有的挑选出来的流浪汉学者是至关重要的。"这位"挑选出来的流浪汉"，有时也自称"逼出来的先锋"，在离开法国的同时离开了学术界，接受了国际商用机器公司沃森研究中心的庇护。在30年从微贱到成名的旅程中，他从未见到过自己的工作在许多他有意指向的学科中受到拥护。甚至数学家们也会并无明显恶意地说，不管曼德勃罗是一位什么家，他并不是一位数学家。

他缓慢地寻求的道路，总是由于过分知晓科学史上的偏僻小径而受到影响。他冒险尝试过数学语言学，解释了词的一种分布规律。（他为所用的符号道歉，但是坚持说问题本身是从一本书评中发现的，而这本书评是为了要在巴黎地铁中随便读点什么才从一位纯数学家的字纸篓里捡来的。）他研究过对策论。他以自己的方式闯入又离开经济学。他在大小城市分布的尺度规律性上有所著述。但把他所有的工作联系起来的共同框架却始终隐藏在背景之中，没有完全形成。

他在国际商用机器公司工作的早期，即研究过商品价格之后不久，他碰上了自己公司庇护人正非常关心的一个实际问题。工程师们被计算机和计算机之间通讯用的电话线中的噪声问题弄得不知所措。信息是离散地由电流携带的，工程师们知道，电流越强，淹没噪声的效果越好。但他们发现某

种自发噪声怎么也无法消除。它偶尔会抹掉一部分信号，造成误差。

虽然传输噪声本质上是随机的，但人们知道它是以聚群出现的。在无误差通讯的期间后会出现误差期间。通过与工程师们交谈，曼德勃罗很快得知有一种关于这类误差的“民间传说”从未被记录下来，因为它和任何一种标准思维方式不匹配：越仔细观察这些聚群，误差的模式看来就越复杂。曼德勃罗提出了一种描述误差分布的方式，它可以准确预言观察到的模式。然而它是极为特殊的。首先，它排除了计算平均误差率的可能性，即每小时、每分或每秒的平均误差次数。按照曼德勃罗的方案，误差平均地是趋向无限稀少的。

他的描述方式是一层一层地深入区分无误差传输和误差传输的期间。假设先把一天分成小时，可能有一小时无误差地经过，其后一小时中可能有误差，然后又可能有一小时无误差地经过。

假设随后把有误差的一小时分成20分钟的小段。又可以发现完全无误差和带有误差聚群的期间。事实上，曼德勃罗论证说，与直觉相反，根本不可能找到一段时间，其中误差是连续散布的。在任何一群误差中，不论时间如何短，总会存在几段完全无误差的传输。更有甚者，他还发现了误差聚群与无误差传输段之间一致的几何关系。无论是在小时或在秒的尺度上，无误差期间与有误差期间之比总是常数。（有一次曼德勃罗吓了一跳，因为一组数据看来与他的方案矛盾——但随即发现，原来工程师们未能记录下来极端的情形，他们假定这些信号是无关紧要的。）

工程师们没有现成的框框来理解曼德勃罗的描述，但数

学家们是有的。实际上曼德勃罗是在重复因 19 世纪的数学家康托尔而命名的一种抽象构造——康托尔集。为了构造一个康托尔集，可取从 0 到 1 的数区间作为开始，并用线段来表示。然后去掉中间的 1/3。在剩下的两个线段中，再各去掉中间的 1/3（即从 1/9 到 2/9 和从 7/9 到 8/9 的两段）。这样就剩下 4 个线段，再去掉每一段中间的 1/3，如此重复以至无穷。剩下些什么呢？由点组成的奇怪的"尘土"，它们排列成聚群，有无穷多个但又无限稀疏。曼德勃罗把传输误差想象成按时间排列的康托尔集。

这种高度抽象的描述对于试图在控制误差的不同战略之间作出决定的科学家们是有实际重要性的。特别地，这表明工程师们不应靠加强信号来淹没越来越多的噪声，而应当采用适当的信号，容忍不可避免的误差，并采用多余信息的战略来发现和改正误差。曼德勃罗还改变了国际商用机器公司的工程师们思考噪声来源的方式。过去一阵一阵的误差总是促使工程师们去查找是否有人又在什么地方插了一柄螺丝刀。但曼德勃罗的尺度变换模式表明，永远不可能在特殊局部事件的基础上把噪声解释清楚。

曼德勃罗转向世界上河流的数据。埃及人保持着几千年来尼罗河水位的记录。这并不是人们随便关心的事。尼罗河的变化很不平常，某些年岁洪水泛滥，另一些年代又水势减退。同处理经济学一样，曼德勃罗把这种变化按两种效应分类，分别称为诺亚效应和约瑟效应①。

诺亚效应意味着不连续：当一个量改变时，它几乎能改变得任意快。经济学家们从传统上设想价格平稳变化——具体情形可快可慢，但平稳的意义是从一点到另一点时要通过

所有的中间水平。就像大部分用于经济学的数学一样，运动的形象借自物理学。然而这是错误的。价格可以在瞬间跃变，就像一则消息经过电传机发来，成千的经纪人就立刻改变主意一样。曼德勃罗论证说，如果一种股市战略假定股票售价从60美元降到10美元时一定要经过50美元的售价，那就注定要失败。

约瑟效应意味着持续性。“埃及土地上有7年大洪水。此后又将有7年干旱”。如果《圣经》里的传说意指周期性，那当然是过分简化了。然而洪水和干旱确是持续的。尽管有潜在的随机性，但一块地方遭受旱灾越久，它就越可能继续受灾。此外，对尼罗河水位的数学分析表明，无论按一百年计还是按十年计，这种持续性都有所显现。诺亚效应和约瑟效应的作用方向不同，但它们叠加的效果是：自然界中的趋势是现实的，不过它们可能同样快地来临和消失。

不连续性、阵发噪声、康托尔尘土——在过去2,000年的几何学里没有这类现象的位置。经典几何学里的形状是线和面，圆和球，三角形和锥。它们代表着对现实的有力抽象，它们启示了柏拉图式和谐的强大哲学。欧几里得借助它们建立了持续2,000年的几何学，至今仍然是许多人学习过的唯一几何学。艺术家们在其中发现理想的美，托勒密派的天文学家们用以构造了宇宙理论。但对于认识复杂性，它们原是一种错误的抽象。

曼德勃罗喜欢说，云彩不是球面。山峰也不是圆锥 闪

---

① 诺亚和约瑟都是《圣经》中的人物，前者是洪水后新生人类的祖先，后者是马利亚的丈夫。——译者

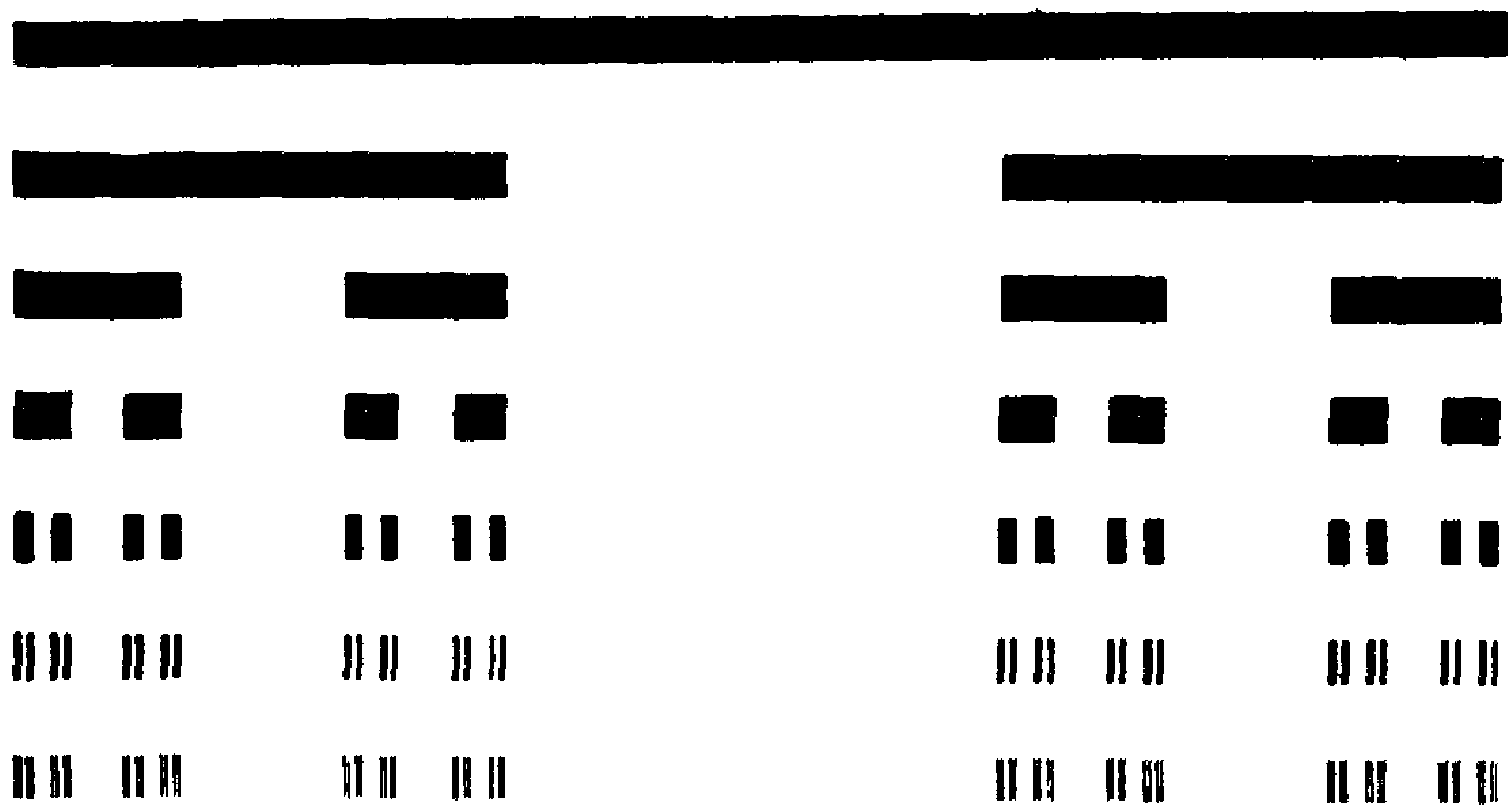


图 5 2　康托尔尘土

从一条线开始，去掉中间 1/3；然后去掉剩下线段的中间 1/3；如此继续下去。康托尔集就是剩下的尘土状的点。它们的数目无穷多，但总长度是零。

这种构造的自相矛盾的性质曾经使 19 世纪的数学家感到困惑，但曼德勃罗把康托尔集看成电子传输线中发生误差的一种模型。工程师们看到无误差传输的期间和误差群出现的期间混在一起。更仔细地观察时，在误差群内又看到无误差传输的期间。如此等等——这是分形时间的例子。在从小时到秒的每一个时间尺度上，曼德勃罗发现误差与无误差传输的比值保持恒定。他主张，在模拟阵发混沌时这样的尘土是必不可少的。

电并不按直线前进。新几何学所反映的宇宙粗糙而不圆润，凹凸而不光滑。这是斑痕、麻点、破碎、扭曲、缠绕、纠结的几何学。对自然界复杂性的了解期待着一种怀疑，即这种复杂性并非只是随机和偶然的。它要求一种信念，相信例如闪电路径的有趣特征并不是它的方向，而是那些大大小小的曲

折断裂的分布。曼德勃罗的工作提出了对世界的另一种主张，这主张乃是奇形怪状具有意义。凹凸和缠绕比瑕疵更严重地歪曲了欧几里得几何学中的经典形状。它们常常是理解事物本质的关键。

例如，海岸线的本质是什么？曼德勃罗在一篇文章中提出了这个成为他自己思想转折点的问题："英国的海岸线有多长？"

曼德勃罗是在英国科学家理查逊死后发表的一篇鲜为人知的文章中遇到海岸问题的。理查逊曾经摸索过大量多得惊人的现象，它们后来都成为混沌的一部分。他曾在20年代提到过数值天气预报，曾往科德角的水道里倾撒过整口袋白色防风草以观察湍流，并在1926年写的一篇文章里问过："风有速度吗？"（他说："这个初看起来很傻的问题，可以改进我们的认识。"）由于对海岸线和曲折的国境线感到怀疑，他核查了西班牙、葡萄牙、比利时和荷兰的百科全书，发现这些国家对共同边界长度的估计相差20%。

曼德勃罗对这个问题的分析，使听众们不是感到过于显然，就是觉得极不真实。他发现多数人对于上述问题的回答不外乎二者之一："我不知道，这不是我的领域，"或者"我不知道，但我可以查一下百科全书。"

曼德勃罗论证说，事实上，任何海岸线在一定意义上都是无限长的。在另一种意义上，答案依赖于所用的直尺的长度。考虑一种似乎可信的测量方法。测量员拿一只两脚规，把它张开成一码宽，然后沿着海岸线一步步地测量。所得的码数只是真实长度的一种近似，因为两脚规忽略了一切短于一码的迂回曲折，而测量员不管这些，就把数字记下了。然后，

他把两脚规并得窄一些，例如一英尺宽，并重复上述过程。他将得到稍大的长度，因为这时两脚规将反映出更多细节，原来每步一码量了一步得到的距离，现在每步一英尺量出来不止三步。他把这个新的数记下来，再把两脚规改成 4 英寸，并重新开始。这个使用不同的两脚规的想象中的实验，是反映从不同距离、以不同尺度观察物体的效果的定量方法。一位试图从人造卫星上估计英国海岸线长度的观察者，比海湾和海滩上的踏勘者，将得出较小的数值。而后者比起爬过每一粒卵石的蜗牛来，又会得到较小的结果。

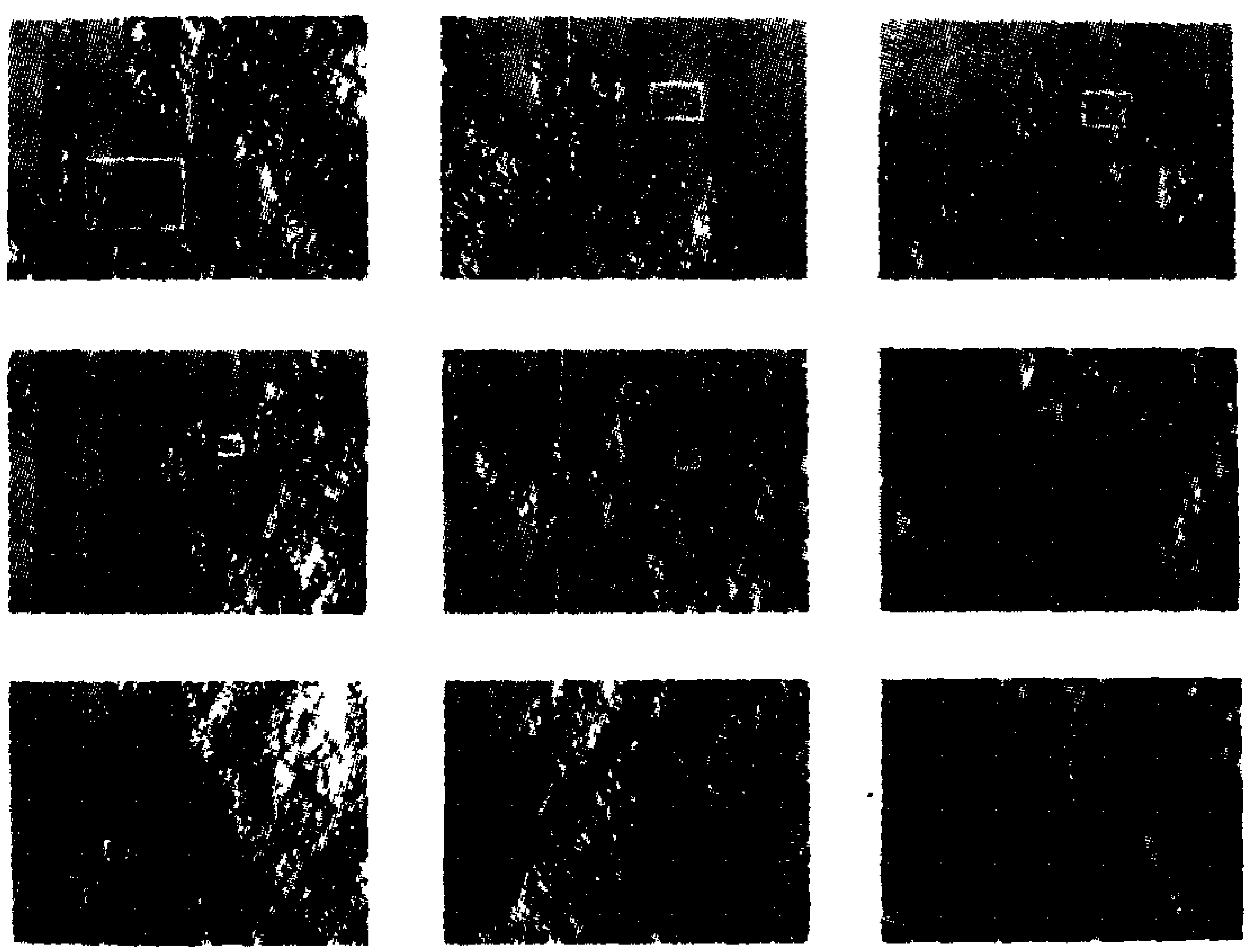


图 5 3 分形海岸

一条计算机产生的海岸线：细节是随机的，但分维保持一定，因此无论把图象放大多少倍，粗糙和无规则的程度看来都是相同的。

常识会告诉我们，虽然这些估值一个比一个大，但它们会趋近某个特定的最终值，即海岸线的真正长度。换句话说，这些测量应当收敛。而事实上，如果海岸线是某种欧几里得形状，例如一个圆，这种把精益求精的直线距离加起来的办法确实应当收敛。但曼德勃罗发现，当把所用的测量尺度变小时，所得的海岸线长度无限上升，因为海湾和半岛显露出越来越小的子海湾和子半岛——至少直至原子尺度，那时这个过程也许真到头了。

新的维数

由于欧几里得测度——长度、宽度、厚度——不能抓住不规则形状的本质，曼德勃罗转向新的想法，即关于维数的想法。维数对于科学家比对于非科学家具有远为丰富的生命。我们生活在三维世界中，意思是我们需要用三个数来确定一个点，例如经度、纬度和海拔。这三个维数可以设想成彼此成直角的三个方向。这仍然是欧几里得几何学的遗产：空间是三维的，平面是二维的，线段是一维的，点是零维的。

当年使欧几里得得以设想一维和二维物体的抽象过程，轻而易举地充满了我们的日常生活。一张道路图从任何实际意义上看，都是典型的二维对象，平面的一部分。它利用两个方向来传递确是二维的信息。当然，道路图在现实中像其他物体一样，也是三维的，但它们的厚度薄（而且与用途无关）得完全可以忽略。从效果上讲，即使把道路图折叠起来，它还是二维的。在同样的意义下，一条线实际上是一维的，而一个粒子实际上不具有任何维数。

那末，一个绳球的维数如何呢？曼德勃罗回答说，这与观点有关。从很远处看，绳球不过是一个点，维数是零。近些看，绳球充填着球形空间，具有三维。再近些就看到了绳子，对象事实上又成为一维的，虽然这一维利用了三维空间而自我缠绕起来。用多少个数才能确定一个点，这个概念仍是有用的。从远处看，一个数也用不到，只是一个点而已。近些看，要用三个数。再近些，一个数就够了——不管绳子是拉伸开或是绕成团，特定一点在绳子上的位置是唯一的。

再往微观走一步：绳子成了三维柱，而这些柱又分解成一维的纤维，固体的材料最后化为零维的点。曼德勃罗以一种非数学方式求助于相对论："数值结果应当依赖于物体对观测者的相对关系，这一观念乃是本世纪物理学的精神，甚至是它的范例。"①

把哲学放到一边，物体的有效维数确实可能不同于世俗的三维。曼德勃罗的口头论据的一个弱点，看来是它借助于一些模糊概念，"从很远处"和"靠近一点"。中间又如何呢？显然并没有一个绳球从三维对象变成一维对象的清楚的界限。然而，这并不是一个弱点，这种过渡的定义得不确切的性质正好导致关于维数问题的一种新思想。

曼德勃罗越过 0，1，2，3，……进入了看起来像是不可能的分数维数②。从概念上说，这是一场走钢丝表演。对于非数学家，它要求先自愿地暂停疑虑。而事实将证明它是极为强有力的。

分维将成为测度用其他方法不能明确定义的一些性质

---

① 此说法不确，曼德勃罗没有理解相对论的实质。——校者

——一个对象粗糙、破碎或不规则的程度——的手段。例如，一条曲折的海岸线，虽然长度不能测量，但它却具有某种特征性的粗糙度。曼德勃罗规定了在给出构造图形的某种技巧或给出某些数据后，计算实际物体分维的方法，并使这种几何学对他所研究的自然界中的不规则图形有所论断。这论断就是在不同的尺度上不规则的程度保持恒定。令人惊奇的是，这一论断经常是对的。世界一次又一次地显示出有规则的不规则性。

1975年冬天的一个下午，曼德勃罗正在准备以书的形式发表第一本主要专著。他意识到物理学中正在兴起的并行的潮流，决定为自己的形状、维数和几何取一个名字。他的儿子刚从学校回来，曼德勃罗随意翻翻这个男孩的拉丁文词典。他遇到了从动词 *frangere*（意为破坏）变来的形容词 *fractus*。英语里重要同源词 *fracture*（断裂）和 *fraction*（分数）的共鸣看来是合适的。于是曼德勃罗造了 *fractal*（分形）这个词（既是名词又是形容词，是英语也是法语）。

分形几何中的怪物

通过思维之窗，分形是观察无穷的方法。

设想有个每边长1英尺的三角形。设想一种变换——特定的、明确定义的、便于重复使用的一组规则。取每边的中间1/3，接上去一个形状完全相似但边长仅1/3的三

② 以下多译为"分维"。——校者

角形。

结果是一个形如大卫王盾牌的六角星。它的边界不再是3个1英尺长的线段，而是12个4英寸长的线段。顶点也不是3个，而是6个。

现在取12边中的每一边，重复同样的变换， 即在中间1/3段上接一个更小的三角形。再次重复，直至无穷。外边界变得越来越细微曲折，就像康托尔集变得越来越稀疏一样。它

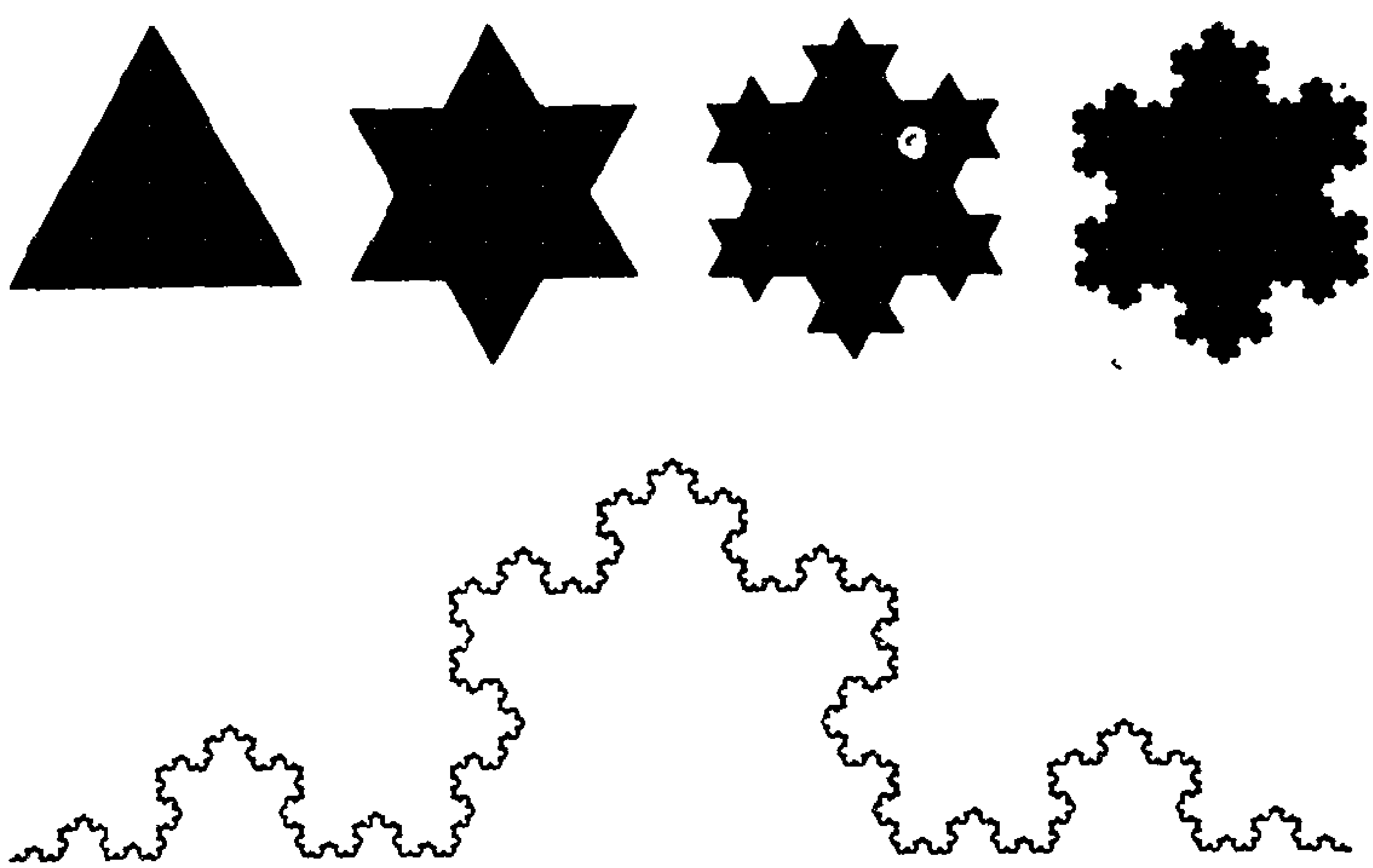


图5 4 科克雪花

用曼德勃罗的话说，是“粗糙而生动的海岸线模型”。为了构造科克曲线，取边长为1的三角形。在每边中段加上尺寸为1/3的三角形，如此继续下去。边界的长度是3×4/3×4/3×4/3……，直到无穷。但面积永远小于包围初始三角形的圆。 于是一条无限长的线包围着一块有限的面积。

使人想起一种理想化的雪花。它的名字叫科克曲线，因为瑞典数学家科克在 1904 年第一次描述了这种不论由直段还是由曲段组成的始终保持连通的线。

只要思索一下，就会发现科克曲线具有某些有趣的性质。首先，它是一条连续的回线，永远不自我相交，因为每边上新加的三角形都足够小，以致彼此碰不上。每一次变换在曲线内部增加一点面积，但总面积仍是有限的，事实上比初始的三角形大不了许多。如果画一个外接圆把初始的三角形包起来，科克曲线永远也不会超出这个圆之外。

然而，曲线本身却是无限长的，同任何伸向无边无际的宇宙深处的欧几里得直线一样长。就像第一次变换把长 1 英尺的每边换成 4 个各长 4 英寸的线段一样，每一次变换使总长度乘上 4/3 在有限空间里的无限长度，这一自相矛盾的结果曾使本世纪初思考过这一问题的许多数学家感到烦恼。科克曲线是一个怪物，它触犯一切关于形状的合理直觉。几乎不用说，它不同于在自然界里见到的任何事物，成了一种反常现象。

在这种情况下，他们的工作在当时没有什么影响，但是还有少数同样违反常规的数学家们想出过另一些形状，它们具有科克曲线的某些古怪性质。有皮亚诺曲线。有席尔宾斯基地毯和席尔宾斯基垫子。为了造一块这样的地毯，取一个正方形，三等分各边把它画成 9 个相等的方块，摘除中间的一个。然后对剩下的 8 个方块重复同样的操作，在每块中心形成一个方洞。垫子也是类似做法，只不过用等边三角形代替方形；它具有一种难以想象的性质，即任意一点都是一个分支点，成了叉子结构。难以想象，这是说，你应当设想一

下巴黎的埃菲尔铁塔，作为很好的三维近似，把它的桁条、构架和大梁都分支成越来越小的同样构件，成为由精细零件组成的闪光的网络。埃菲尔当然不能把这一方案继续进行到无穷，他只是欣赏那精致的工程技巧，使他可以减少重量而不削弱结构的强度。

思维是不能使复杂性的无限自我嵌套形象化的。但对于某些对形式具有几何学家的思考方式的人，这样在越来越小的尺度上重复结构却打开了一个新世界。探索这些形状，把精神的触须伸向它们的各种可能性的弹性边缘，这简直是一种游戏。曼德勃罗看到这些从未有人看见过或理解过的变化时像孩子一样兴高采烈。对没有名字的形状，他取了种种名称：绳索和被单，海绵和泡沫，凝乳和垫子。

分维恰好是正确的码尺。在一定意义上说，不规则的程度对应于物体占有空间的有效性。一条简单的一维欧几里得线根本不占有空间。但科克曲线的轮廓，以它的无限长度挤在有限的面积之中，确实是占有空间的。它比线要多，但比平面少。它比一维大，但仍不及二维图形。使用由本世纪初的数学家们发明但久已被忘却的技术，曼德勃罗得以精确刻划分维。对于科克曲线，无穷次乘以 4/3 的扩展结果给出维数 1.2618。

在沿着这条道路前进时，曼德勃罗比那些少数想过这类形状的数学家们有两大优点。首先是他具有与国际商用机器公司的名字相连的计算能力。这是适合于特别擅长高速干傻事的计算机的另一种理想任务。就像气象学家们需要对大气中成百万个相邻的点执行少数同样的运算那样，曼德勃罗需要一而再、再而三地执行一些极易编程序的变换。在设计变

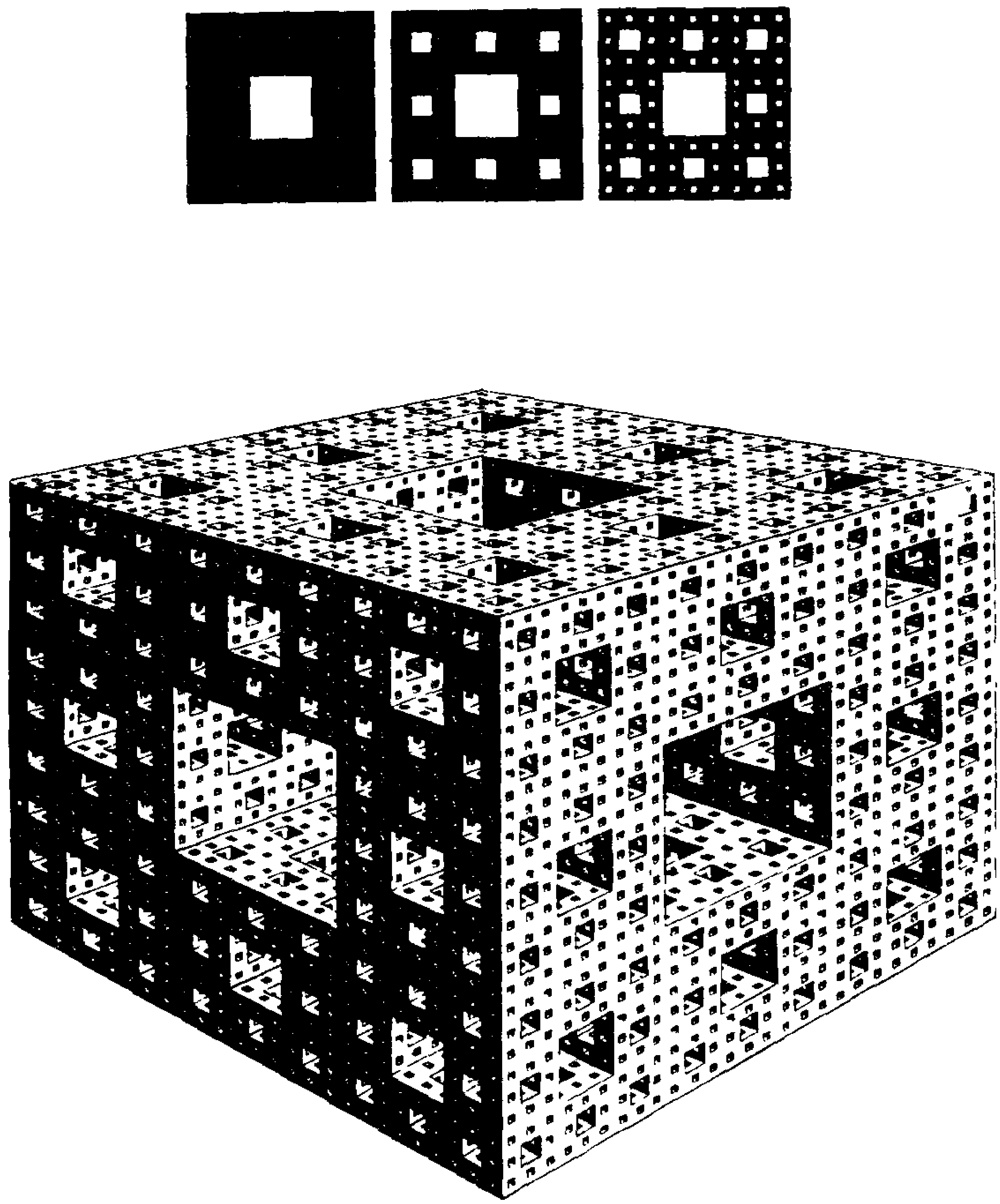


图5 5 有空洞的结构

20 世纪初的某些数学家，设想过一批用添加或除去无穷多部分的方法制造的古怪形体。这种形体之一是席尔宾斯基地毯：把正方形的中央 1/9 割去，再割去剩下的 8 个小正方形的中央 1/9， 如此继续卜去。它的三维类似物是门杰海绵。这是一个看起来像立方体的架子，它具有无穷大的表面积，但体积为零。

换时他可以独出心裁。计算机还可以把它们画出来——结果有时出乎意料。20 世纪初的数学家们很快就遇到了计算障碍，就像没有显微镜的早期生物学家面临的困难一样。在观察一个具有越来越精微的细节的宇宙时，人们的想象只能适可而止。

用曼德勃罗的话说，“绘图在数学中的作用大约中断了 100 年，因为手、铅笔和直尺已经耗尽其所能。人们完全懂得这一点，也就不勉为其难。而计算机还没有出现。

“当我进入这套游戏时，这里完全没有直觉。我必须从头建立直觉。由通常的工具——手、铅笔和直尺——训练出来的直觉，会觉得这些图形十分怪异和反常。老的直觉使人误入歧途。第一批图形曾使我大吃一惊；然后我从以前的图形中看出一些图形，如此等等。

“直觉并不是天生的。我训练自己的直觉把最初认为荒谬而拒绝的形状作为显然的事物接受下来，而且我发现其他每个人都同样能做到。”

曼德勃罗的另一大优点，是他在处理棉价、电子传输噪声和洪水时已经开始形成的关于现实世界的图象。这一图象现在开始成为注意的焦点。他对于自然过程中不规则模式的研究，和对于无穷复杂的形状的探索，具有一种理性的交叉：一种自相似性。首先，分形的意义是自相似。

自相似是跨越不同尺度的对称性。它意味着递归，图案之中套图案。曼德勃罗的价格图和水位图都显示出自相似性，因为它们不仅在越来越小的尺度上产生细节，而且以某种恒定的测度产生细节。科克曲线这类怪物也显示出自相似性，因为在高倍放大下它看来依然如故。自相似性已经纳入构造这

些曲线的技术中——同样的变换在越来越小的尺度上重复。自相似性是一种很容易辨认的性质。它的形象在生活中比比皆是：站在两面镜子间的人有无数个反射像，或者在动画片中，大鱼吃小鱼，小鱼又吃小小鱼。曼德勃罗喜欢引用斯威夫特的话：

> 于是博物学家看到小跳蚤，
> 又有小跳蚤在上面跳，
> 它们又挨小蚤咬，
> 这样下去没个了。

“分裂层”中的地震

在美国东北部研究地震的最好地方是拉蒙-多荷蒂地球物理观测站。一群不引人注目的建筑物隐藏在纽约州南部的森林中，正在哈得孙河西岸。拉蒙-多荷蒂是哥伦比亚大学专门研究固体地面形态和结构的肖尔茨教授第一次开始思考分形的地方。

当数学家和理论物理学家们还漠视曼德勃罗的工作时，肖尔茨正好是那种务实而苦干的、准备接受分形几何学工具的科学家。肖尔茨在60年代就偶然碰到过曼德勃罗的名字，那时曼德勃罗正在从事经济学研究，而肖尔茨是麻省理工学院的研究生，正在花费大量时间思考一个棘手的地震问题。20年来人们就熟知大小地震的分布遵从一种特别的数学模式，它恰好与那种似乎支配着自由市场经济下个人收入分布的尺度变换模式一样。在地球上任何地方，只要观测过地震，就

会看到这个分布。考虑到地震活动在其他方面是多么不规则和不可预言，人们自然要问是什么物理过程造成了这种规则性。或许在肖尔茨看来也是如此。大多数地震学家们满足于注意到这一事实并继续前进。

肖尔茨记得曼德勃罗的名字，于是在1978年买了一本插图丰富、旁征博引、方程密布的书，这本书的名字是《分形：形态、机遇和维数》。曼德勃罗好像是把自己对宇宙所知或所疑的一切全搜罗进了一本杂乱无章的书中。几年之内，这本书和它的增订修正本《自然界的分形几何学》，销售量超过任何其他高等数学书籍。它的文风深奥恼人，妙趣横生、咬文嚼字和晦涩难解之处交替出现。曼德勃罗自己称它是"宣言加手册"。

像少数其他领域中的同类人，特别是同自然界的物质方面打交道的科学家一样，肖尔茨花了几年时间试图弄清怎么利用这本书。结果很不清楚。按肖尔茨的说法，《分形》"不是一本基础知识书，而是一本叫你目瞪口呆的书"。然而，肖尔茨恰好很关心曲面，而这本书里处处是曲面。肖尔茨觉得自己无法停下来不想曼德勃罗的思想的后果。他开始设计出一种用分形来对自己的科学世界中的片段进行描述、分类和测量的方法。

虽然那还是在分形会议和讨论班开始日益增加之前好几年，但肖尔茨很快意识到自己并不孤独。分形几何学的统一思想把一批科学家带到一起来，他们都觉得自己的观测结果十分特异，没有系统的方法去理解它们。分形几何学的洞察力帮助了那些研究事物如何融合、如何分开、如何粉碎的科学家们。这是一种观察材料的方法——无论是观察微观上参

差不齐的金属表面，还是多孔的含油岩石中的细小孔穴和通道，还是地震区里支离破碎的景观。

在肖尔茨看来，描述地球表面是地球物理学家的职责，这一表面与平展的海洋相交而成海岸线。固体地面的顶部内是另一类表面，断裂的表面。于是断层和断面统治着地面结构，它们成了任何良好描述的关键，总的说来，它们比它们所经过的材料本身更重要。这些断面在三维方向纵横交错地布满地球表面，肖尔茨忽发奇想，称之为“分裂层”。它们控制着地层中流体的运动——水流、油流和天然气流。它们控制着地震活动。了解地面是至关重要的，然而肖尔茨也确信他的职业陷入了窘境。老实说，不存在任何一种框架。

地球物理学家同任何人一样，把表面看作形状。表面可能是平的，也可能具有特殊形状。例如，你可以观察一下大众牌小汽车的轮廓，把表面画成曲线。这曲线可以用熟悉的欧几里得方式加以测量。也可以试用方程来拟合。但是根据肖尔茨的描述，这只是通过很窄的谱带在观察表面。这就像通过红色滤波器观看太空，你只能看到在特定的光波波长下发生的事，而失去了发生在其他颜色波长下的一切事物，更不用提在红外辐射和无线电波这两个宽阔频谱区里的活动。在这个类比中，频谱相当于尺度。用欧几里得的形状来思考大众牌轿车的表面，这只是在 10 米或 100 米外的观察者的尺度上来观看。1 公里或 100 公里外的观察者又如何呢？1 毫米或 1 微米处的观察者又怎样呢？

试设想一下从外空间 100 公里的距离追踪地球表面时它是什么样子。视线沿树木、小丘、建筑物上上下下，忽然在一个停车处里有一辆大众车。在这样的尺度上，地面不过是

处在一堆隆起中的又一个小隆起，一点随机性。

或者设想从越来越近的地方看这辆车，用放大镜和显微镜来取景。一开始会觉得表面变得平滑一些，因为那些缓冲器和发动机罩的圆形都落到视野之外。然而这时钢铁的微观表面本身又显得高低不平，而且显然又是随机的。这看起来是混沌的。

肖尔茨发现分形几何学提供了描述地面的特殊崎岖不平的强有力手段，冶金学家们对于不同的钢材表面也有同样的发现。例如，金属表面的分维往往能提供关于金属强度的信息。地面的分维也提供理解它的重要性质的线索。肖尔茨想到一种经典的地质结构，即山麓堆积。从一定距离看，它是二维的欧几里得形状。但是当一位地质学家走近它之后，就发现自己不是在它上面而是在它里面行走，山麓堆积分解成了如同汽车一样大小的砾石。它的有效维数变成了2.7，因为岩石表面卷曲包容，几乎填满三维空间，就像海绵的表面一样。

在与互相接触的表面的性质有关的一系列问题中，分形描述也找到了直接应用。轮胎面与水泥地面的接触就属于这类问题。机械接合中的接触或电气接触也是如此。表面间接触的性质与所用材料的关系很小。事实上它们更依赖于那些隆起上的隆起的隆起的分形特性。表面的分形几何学的一个简单而有力的推论是，相接触的表面并不处处接触。各种尺度的隆起阻止它们接触。甚至于在处于巨大压力下的岩石中，在足够小的尺度上也清楚地留有空隙，使得液体得以流过。对于肖尔茨来说，这就是破镜不能重圆那种效应。这就是为什么两块破茶杯永远也不能再接到一起，虽然从某种较粗疏的

尺度上看它们彼此很好地吻合。在较细小的尺度上，不规则的隆起是不可能重合的。

肖尔茨在自己的领域中作为少数使用分形技术的人之一而知名。他明白有一些同事把这少数人看成怪诞派。如果在文章标题中使用了“分形”这个词，他知道人们或者认为他是值得赞赏的新派人物，或是把他看作不值得赞赏的赶潮流者。甚至写文章时也必须作出困难的抉择，或是为少数分形迷写，或是为更多的地球物理学读者写，那就要从解释基本概念开始。然而，肖尔茨仍认为分形几何是离不开的工具。

他说:“这是容许我们对付地球的变化着的维数范围的单一模型，它提供进行描述和作出预言的数学与几何工具。一旦越过了隆起，并懂得了典型范例，你就真的能开始用新的方法测度事物和思考事物，你的看法会有所不同。你有了新的视觉。它同旧的视觉完全不是一回事，它宽广多了。”

从云彩到血管

它有多大？它会持续多久？这是科学家问一件事时的两个基本问题。它们对于人们如何把世界概念化来说是很基本的，因而不容易察觉其中隐含的一种倾向。它们暗示形状大小和时间长短这些与尺度有关的性质是有意义的性质，是可以帮助我们描述或区分事物的性质。当生物学家描述人，或者物理学家描述夸克时，多大和多久确实是适当的问题。就大的物理结构而言，动物在很大的程度上与一个特定尺度相关。设想把一个人的尺寸放大到两倍，使一切比例保持相同，则这个结构的重量会把骨骼压垮。尺度确是重要的。

地震行为的物理学在相当大程度上与尺度无关。大地震只是小地震按尺度放大的结果，这就使得地震不同于例如动物，因为10英寸长的动物的结构必然极不同于1英寸长的动物，而100英寸长的动物需要更不同的结构，才不致在质量增加的情况下引起骨折。另一方面，云彩是和地震一样地可以有尺度变换的现象。在不同的尺度下观察时，它们所特有的不规则性（可用分维描述）完全不变。因此空中旅行者展望云朵时无法判断它有多远。如果不借助于雾气之类的提示，20英尺外的云彩与2,000英尺外的云彩是区分不开的。而且事实上，卫星云图的分析表明，从几百英里高空观察的云彩具有不变的分维。

很难打破按照多大、多久来思考事物的习惯。然而分形几何学的主张是，对于自然界里的某些客体，寻求特征尺度是枉费心机。举飓风为例。按照定义，它是一定大小的风暴。但这定义是人强加给自然的。在现实世界里，大气科学家们知道空气中的骚动形成连续分布，从城市街道拐角卷起垃圾的阵风，到从外空可以看到的巨大气旋系统。分类有时会引入歧途。连续谱的端点可能与中段连成一片。

液体流动的方程组碰巧在许多方面是无维的，也就是说，他们的应用与尺度无关。按尺度缩小的机翼和轮船螺旋桨可以在风洞和实验水槽中检验。此外，稍作限制，小风暴的行为是与大风暴相似的。

血管，从主动脉到微血管，形成另一类连续分布。它们分支再分支，直到细得使血球细胞被迫排成单行滑动。它们分支的性质是一种分形。它们的结构使人们回忆起曼德勃罗引用过的本世纪初数学家们想象的怪诞对象之一。作为生理

必需，血管必须变一些维数魔术。例如，就像科克曲线把无限长的线挤进小面积一样，循环系统必须把巨大的表面积挤进有限的体积。就体内资源而言，血液是昂贵的，空间也必须珍惜。大自然所发明的分形结构工作得非常有效，以致在多数组织中，永远没有一个细胞与血管的距离超过三四个细胞之远。即使如此,血管和血液只占用了很小的空间,不超过人体的5%。就像曼德勃罗所说，这是《威尼斯商人》里的场景，你非但不能不流血地割去1磅肉,连割1毫克也办不到。

这种精致结构——实际上是动脉和静脉相缠绕的两棵树，远非一种例外。体内充满了这种复杂性。在消化道里，组织表现出波纹夹着波纹。在肺脏里，也是要把最大可能的面积装进最小的空间。一只动物吸收氧气的本领大致比例于肺的表面积。典型的人肺表面展开之后比网球场还大。作为附加的复杂化，气管的迷宫还必须高效地与动脉和静脉交织起来。

每一位医学院学生都知道，肺设计得能容纳巨大的表面积。但是解剖学家们被训练得每次看一个尺度．例如那作为气管分支序列终点的成百万个肺泡，那些微观小囊。解剖学的语言倾向于掩盖跨越不同尺度的统一性。作为对比，分形观点把握由分支产生的整个结构，把握从大尺度到小尺度保持一致的分支行为。解剖学家们研究循环系统时按血管的大小分类——动脉和小动脉，静脉和小静脉。为了某些目的，这种分类是有用的。但在另一些情况下，它们会引起误解。教科书里的提法有时却离真理不远："在从一种动脉逐渐过渡到另一种动脉时，有时很难区分中间区域。有些中等直径的动脉具有适用于更粗动脉的管壁，而某些大些的动脉，其管壁

却与中等尺寸的动脉相像。这些过渡区域……常常称为混合型动脉。”①

并不是紧接着，而是在曼德勃罗发表他关于生理学的推测之后10年，一些理论生物学家开始发现分形组织控制着贯串全身的结构。支气管分支的标准的“指数式”描述被证明是十分错误的；而分形描述与数据相符。泌尿系统也是分形系统。肝脏里的胆管也是。心脏中输送电流脉冲到收缩肌肉的特殊纤维的网络也是。这后一类结构被心脏专家们称为希司-浦肯雅纤维束，它启迪了一个特别重要的研究方向。对健康和反常心脏进行的大量工作表明，关键在于左右两个泵室的肌肉细胞如何都对它们的动作时间进行协调的细节。好几位具有混沌思想的心脏学家发现，心跳节律的频率谱与地震和经济现象一样，遵从分形规律。他们认为理解心跳节律的关键之一就是希司一浦肯雅纤维束的分形结构；这是一组分支通道的迷宫，在越来越小的尺度上具有自相似的组织。

自然界是如何演化出这些复杂建筑的呢？曼德勃罗的观点是，只有在传统的欧几里得几何学的意义下才存在复杂性。作为分形，分支结构可以近乎透明地简单描述，只需要几位数字的二进制信息就够了。或许导致科克、皮亚诺和席尔宾斯基所设计的形状的简单变换，在有机体遗传基因的编码指令中也有类似物。*DNA*显然不能规定如此大量的支气管、细支气管和肺泡或结果所形成的树的特殊空间结构，但它能规定重复的分岔和发展过程。这些过程适合于大自然的目的。杜邦公司和美国军方最终得以生产鹅绒的人工合成品，也是因

① 引自布卢姆和福西特的《组织学教程》(1975)。

为理解了天然产品的非凡存气功能来自羽绒的关键性蛋白即角蛋白的分形结点和分支。曼德勃罗理所当然地从肺和循环系统的树结构转向现实植物界中的树，它们需要用分形的枝叶来获取阳光和抵抗风力。理论生物学家们也开始推测，在形态发生过程中，分形尺度不仅是常见的，而且是普遍的。他们认为，理解这些模式如何编码和处理，已经成为对生物学的主要挑战。

科学的垃圾筒

“我开始在科学的垃圾筒里寻找这类现象，因为我觉得自己的观察对象不是例外而可能是普遍的。我去听演讲和翻阅不时髦的杂志，大多无所收获，但也偶尔发现某些有趣的事情。在一定意义上，这是博物学家而不是理论家的做法。但我打赌还是赢了。”

集毕生关于大自然和数学史的探索于一书，曼德勃罗获得了没有先例的学术成就。带着成盒的彩色幻灯片，披着缕缕白发，他成为科学演讲圈里的常驻人物。他开始赢得奖金和其他学术荣誉，他的名字在非科学界中和任何数学家一样响亮。这种情况一方面是由于他的分形图画的美学感染力，一方面是由于成千上万个拥有微型计算机的爱好者们可以亲自去探索这个奇妙世界。同时也由于他自己的勇往直前。哈佛大学的科学史家I·伯纳德·科恩所编的短短名单上有他的名字。科恩多年搜索过发现史料，寻找那些把自己的工作宣布为“革命”的科学家们。他一共找到16位。西默，一位和富兰克林同时代的苏格兰人，他关于电的思想固然激进，但

却是错误的。马拉，今天人们只知道他对法国大革命所作的流血的贡献。李比希。哈密尔顿。达尔文当然是。微耳和。康托尔。爱因斯坦。闵可夫斯基。劳厄。韦格纳（大陆漂移）。康普顿。贾斯特。沃森（DNA结构）。还有曼德勃罗。

然而，对于纯数学家来说，曼德勃罗仍是一个同以往一样与科学政策作痛苦斗争的局外人。他在成就最高时，还受到某些同行的谩骂，认为他过分着迷于自己的历史地位，并说他威胁别人来赞扬他。毫无疑问，在作为职业异教徒的年代里，他不仅欣赏科学成就的实质，而且重视科学成就的策略。有时当他看到使用分形几何学思想的文章发表出来后，他会打电话或写信给作者，抱怨说没有引用他的著作。

曼德勃罗的赞赏者们考虑到他为了使自己的工作得到承认而克服的种种困难，觉得他的自负是容易原谅的。有一位说："当然，他是有点狂妄，也相当自负，但他做了件很漂亮的事，所以大家还是由他去。"另一位的话是："他同数学家同行们闹过那么多的别扭，单单为了生存下去他也不得不发展他的自负战略。如果他没有那样做，如果他没有确信自己的正确眼光，他也就不会成功。"

在科学中自己居功和称赞别人会变成令人着迷的事。曼德勃罗两者都做得很多。他的书中充满第一人称：我主张……我设想和发展……和实现……我曾确认……我证明……我创造……在我新开辟或新定居的土地上旅行时，我往往情不自禁地行使为路标命名的权力。

许多科学家不欣赏这种风格。他们对于曼德勃罗同样大量引用前人著作一事也不能保持平静，这些前人中有些已完全不被人所知。（而且，贬低他的人注意到，这些人全都没有

危险地死掉了。)他们想他正是用这种方法试图把自己牢牢地放在中央的位置上，使自己像教皇一样高高在上地把祝福撒向四面八方。他们给予反击。科学家们很难回避“分形”这个词，但是如果他们想不提曼德勃罗的名字，他们可以把分维叫做豪斯道夫-比西柯维奇维数。他们，特别是数学家们，也不满意他那种在各种学科中进进出出，到处宣布一些主张和猜想，而把证明的实际工作留给别人去做的作风。

这是一个合理的问题。如果一位科学家宣称某事可能是真的，而另一位科学家严格地证明了这一点，他们之中谁对推动科学前进做得多一些呢？提出猜想算不算发现？或者这不过是冷酷无情地标明一种主张？数学家们面对这类问题由来已久，但是计算机的新作用使争论更趋激烈。那些用计算机做实验的人变得更像实验室科学家，他们依靠规则行事而不经过通常的定理证明就能作出发现，这里指的是标准数学论文中的定理证明。

曼德勃罗的书包罗万象，而且充满了数学史中的细节。任何地方出现混沌，曼德勃罗就有某些根据宣称自己早已捷足先登过。他也不管许多读者发现他的引文出处不明或者甚至无用。他们必须承认他在从未认真研究过的领域里，从地震学到生理学，对于学科发展方向有非同寻常的直觉。这有时不可思议，有时使人恼怒。甚至一位赞赏者也会怒吼说：“曼德勃罗并不知道每个人在他们产生想法之前的思想。”

这没有什么关系。天才的面孔不必总是带有爱因斯坦的圣人风采。不论怎么说，曼德勃罗几十年来相信必须在自己的工作上玩花样。他必须把原始思想表达得不致得罪人。他必须删去充满梦幻的前言使文章得以发表。当他撰写 1975 年

以法文出版的第一稿时，他感到必须假装它并不包含任何惊人之说。这就是为什么他把最新一版明显写成为“声明加专题资料汇编”。他这是在对付科学政策。

“政策在某种意义上影响着我的文风，这是我后来感到后悔的。我说，‘很自然……，很有趣地观察到……’然而事实上那根本不是什么自然的事儿，而有趣的观察事实上是长期钻研、寻求证明和自我批评的结果。为了使书稿被接受，我觉得必须使它具有一种哲学的和超脱的态度。政策的结果是，如果我宣布我提出的是激进地离经叛道，读者的兴趣也就此结束。

“后来我把某些这样的句子捡回来。人们跟着说‘自然观察到……’，可这并不是我所指望的。”

回顾以往，曼德勃罗看到各个领域中的科学家们对他的方法的反应经历了可悲地可以预言的几个阶段。第一个阶段总是相同的：“你是谁，你为什么对我们的领域发生兴趣？”第二个阶段：“这和我们一直在做的事有什么关系，为什么你不用我们所知道的事作基础来加以解释？”第三个阶段：“你确信这是标准数学吗？”（是的，我确信。）“那为什么我们不知道呢？”（那是因为它虽标准，但又很冷僻。）

在这方面，数学同物理学以及其他应用科学不同。物理学的一个分支，当它已过时或失去生机时，就将永远成为过去的一部分。它可能还是件历史珍品，可能为某一位现代科学家带来灵感，然而死去的物理学总是死有其因的。相反，数学总是充满着某些通道和小路，它们在一个时代似乎此路不通，在另一个时代却可能成为主要的研究领域。一种纯粹思想的潜在应用是永远不可预言的。这就是为什么数学家以美

学方式来评价工作，像艺术家一样寻求雅致与优美。这也是为什么曼德勃罗以古董家的方式找到了那么多即将被打扫干净的好的数学。

于是第四个阶段是："这些数学分支中的专家们怎样看待你的工作呢？"（他们漠不关心，因为这并未给数学添砖加瓦。事实上，他们对自己的思想代表了自然界感到惊奇。）

"分形"一词终于成为描述、计算和思考那些不规则的、破碎的、参差不齐的和断裂的形状的方法的代表，这些形状包括从雪花的结晶曲线到星系中不连续的尘埃。分形曲线意味着深藏在这些惊人复杂的形状中的有组织的结构。高中学生就可以理解分形并且处理它们；它们同欧几里得的原理一样重要。画分形图片的简单计算机程序传遍了个人计算机的爱好者们。

曼德勃罗发现他的最热情的接受者是那些在石油、岩石或金属方面工作的应用科学家，特别是在一些共同研究中心里。例如，80年代中期，在庞大的埃克森研究中心有大量科学家钻研分形问题。在通用电气公司，分形成为聚合物研究中的组织原则；还有在核反应堆的安全问题中也是如此，虽然这工作是秘密地进行的。在好莱坞，分形在产生电影特殊效果方面大显身手，用于创造地上或天外的非凡的"实景"。

梅和约克那些人在70年代初期发现的那些图形，在有序和混沌行为之间具有复杂的边界，无疑还具有只能用大小尺度关系描述的规则性。理解非线性动力学的关键结构是分形。在最直接应用的水平上，分形几何学也为物理学家、化学家、地震学家、冶金学家、概率论家和生理学家提供了工具。这些研究者们自己确信，而且也努力使别人相信，曼德勃罗的

分形几何就是大自然本身的几何学。

他们对于正统的数学和物理学都产生了无可辩驳的冲击，但是曼德勃罗本人从未在这些领域中受到完全尊重。尽管如此，他们还是不得不提到他。一位数学家对朋友们说，某夜被恶梦惊醒时还在发抖。他梦见自己已经死去，突然确定无疑地听到了上帝的声音。上帝说："你知道，那个曼德勃罗还是有两下子的。"

"一粒砂中见世界"

自相似性这个概念在我们的文化中显得古色古香。西方思想的古老旋律就推崇它。莱布尼茨设想过一滴水包含着整个多彩的宇宙，而这个宇宙里面又包含着许多水滴和一些新的宇宙。布莱克写道："一粒砂中见世界"，而且科学家们往往预先有看到它的倾向。第一次发现精子时，每一粒都被设想成一个小人精，一个细小而完全发育的人。

然而，作为一种科学原理的自相似性凋谢了，而这是事出有因的。它不符合事实。精子不是按比例缩小的人——它们比这有趣得多，个体发育过程比简单放大有趣得多。最早把自相似性作为组织原理的意识，源于人类对于尺度经验有限。如果不作为已知事物的扩充，怎样去想象很大、很小、很快、很慢呢？

人类视力由望远镜和显微镜扩充之后，神话并不轻易消亡。最初的发现是意识到每改变一次尺度就产生新的现象和新的行为。对于现代粒子物理学家来说，这一过程远未结束。每一台新加速器，随着能量和速度的增大，把科学的视野引

向更小的粒子和更短暂的时间尺度，而且每一次扩充似乎都带来了新的信息。

乍看之下，新尺度上的一致性这一思想似乎并不带来更多信息。部分地说，这是因为科学中的另一个平行趋势是走向约化。科学家们把事物分开，每次只看一件。如果他们想考察亚原子粒子的相互作用，就拿两三个来放到一起。这已经够复杂了。然而自相似性的威力要在更高层次的复杂性中才能显示出来。这是一个观察整体的问题。

60 年代和 70 年代科学中尺度变换思想的回归，虽然被曼德勃罗作了最广泛的几何应用，但是它成了一种理性潮流，使它同时在许多地方被感觉到。洛伦兹的工作中暗含了自相似性。这曾是他对于那些由方程组画出的图的精细结构的直观理解的组成部分，在 1963 年的计算机上，他只能感觉而不能看到这个结构。尺度变换在物理学中也成了新动向的一部分，而且它比曼德勃罗自己的工作更直接地引向混沌这门学科。甚至在更遥远的领域里，科学家们也开始用涉及不同尺度层次的理论来想问题。例如在演化生物学中，人们清楚地看到，一个完备的理论必须同时在基因、单个生物体、物种和种族中认识发展模式。

这或许是自相矛盾的，即对于尺度现象的了解必须来自人类视野的同一种扩展，这种扩展曾经消灭了早期关于自相似性的天真想法。到了 20 世纪后期，无穷小和无穷大的形象以过去不能设想的方式进入每一个人的经验。人们看到了星系和原子的照片。人们无需再像莱布尼茨那样去想象微观和巨观尺度上宇宙是什么样子，显微镜和望远镜已经把这些形象变成日常经验的一部分。只要思想上有从经验中寻求类比

的渴望，对大小世界的新的比较就是必然的，而且有些比较是卓有成效的。

热中于分形几何学的科学家们常常注意到，在他们的新的数学审美观与本世纪后半叶的艺术变化之间有一种激动人心的并行性。他们觉得自己正在从整个文化中吸取某种内在的热情。对于曼德勃罗来说，欧几里得感受性在数学之外的集中体现就是包豪斯的建筑风格①。它也可以同样好地由艾伯斯的彩色方块绘画表现出来——宽舒整齐、线条简练、几何化。几何化——这个词代表着它几千年来原有的意义。所谓几何化的建筑是由那些用很少几个数就可以描述的简单形状即直线和圆构成的。几何化建筑和绘画的风尚来了又去了。建筑师们不再设计纽约岛上一度被人们不断叫好和模仿的方块摩天楼。对曼德勃罗和他的追随者们，此中原因是清楚的。简单形状缺少人性。它们同自然界组织自身或者人类感官看待世界的方式不能共鸣。用一位原来专攻超导、后来从事非线性科学的德国物理学家爱伦堡的话来说，“为什么一棵被狂风摧弯的秃树在冬天晚空的背景上现出的轮廓给人以美感，而不管建筑师如何努力，任何一座综合大学高楼的相应轮廓则不然？在我看来，答案来自对动力系统的新的看法，即使这样说还有些推测的性质。我们的美感是由有序和无序的和谐配置诱发的，正像云霞、树木、山脉、雪晶这些天然对象一样。所有这些物体的形状都是凝成物理形式的动力过程，它们的典型之处就是有序与无序的特定组合。”

---

① Bauhaus，第二次世界大战前在德国兴起的一种建筑风格，其特点是单调的方匣子结构。——校者

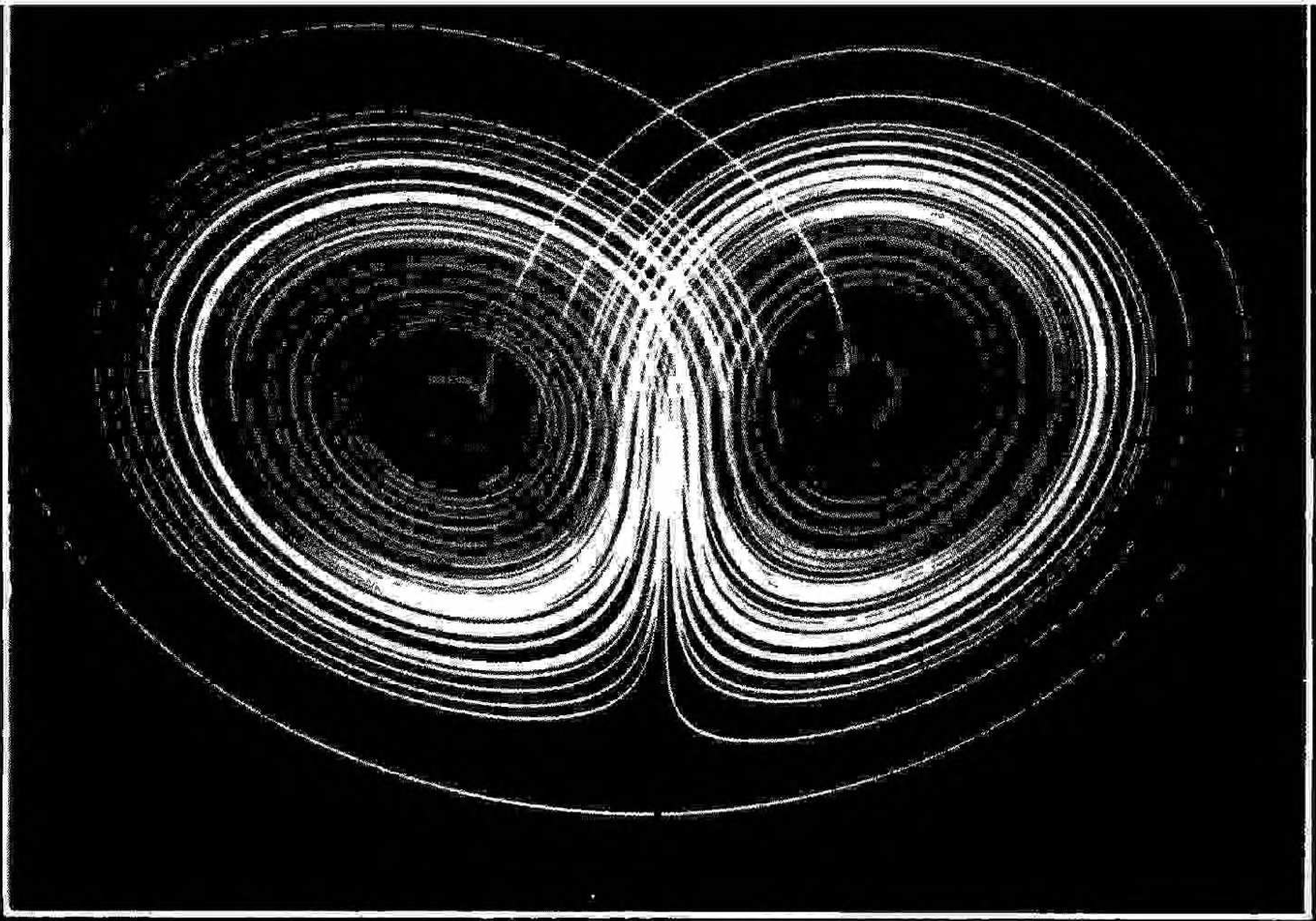
任何几何形状都具有一定尺度，即特征尺寸。在曼德勃罗看来，令人满足的艺术没有特定尺度，就是说它含有一切尺寸的要素。作为那种方块摩天楼的对立面，他指出巴黎的艺术宫，它的群雕和怪畜，突角和侧柱，布满旋涡花纹的拱壁和配有檐沟齿饰的飞檐。艺术宫的典范和巴黎大剧院一样没有特定尺度，因为它具有每一种尺度。观察者从任何距离望去都看到某种赏心悦目的细节。当你走近时，它的构造就在变化，展现出新的结构元素。

欣赏建筑物的和谐结构是一回事，赞美大自然的粗犷野性则又完全是另一回事。就美学价值而言，分形几何的新数学把硬科学也调谐到那种特别的现代感，即追求野性的、未开化的、未驯养过的天然情趣。不久以前热带雨林、沙漠、灌木和荒原曾是社会力图征服的对象。如果人们想满足于草木之美，他们就去观赏花园。像福尔斯描述18世纪的英国时所说的："这个时代毫不同情未开发的原始自然。它充满侵略野性，使人回想起那丑恶的无所不用其极的大堕落，即人类从伊甸园里的放逐。……甚至于当时的自然科学……也对野生自然充满敌意，把它看成驯服、分类、使用和剥削的对象。"到了20世纪末，文化改变了，科学也随之而变。

于是，科学终于为康托尔集和科克曲线的那些模糊怪诞的同类找到了用途。最初，这些形状曾在本世纪初数学和物理科学的离婚诉讼中作为证物，结束了牛顿以来在科学中占统治地位的那场婚姻。康托尔和科克之辈的数学家们曾因为独出心裁而感到喜悦。他们曾以为自己比大自然更聪明，而实际上他们还赶不上大自然的创造。那显赫的物理学主流，也背离了日常经验的世界。只是在后来，当斯梅尔重新把数学

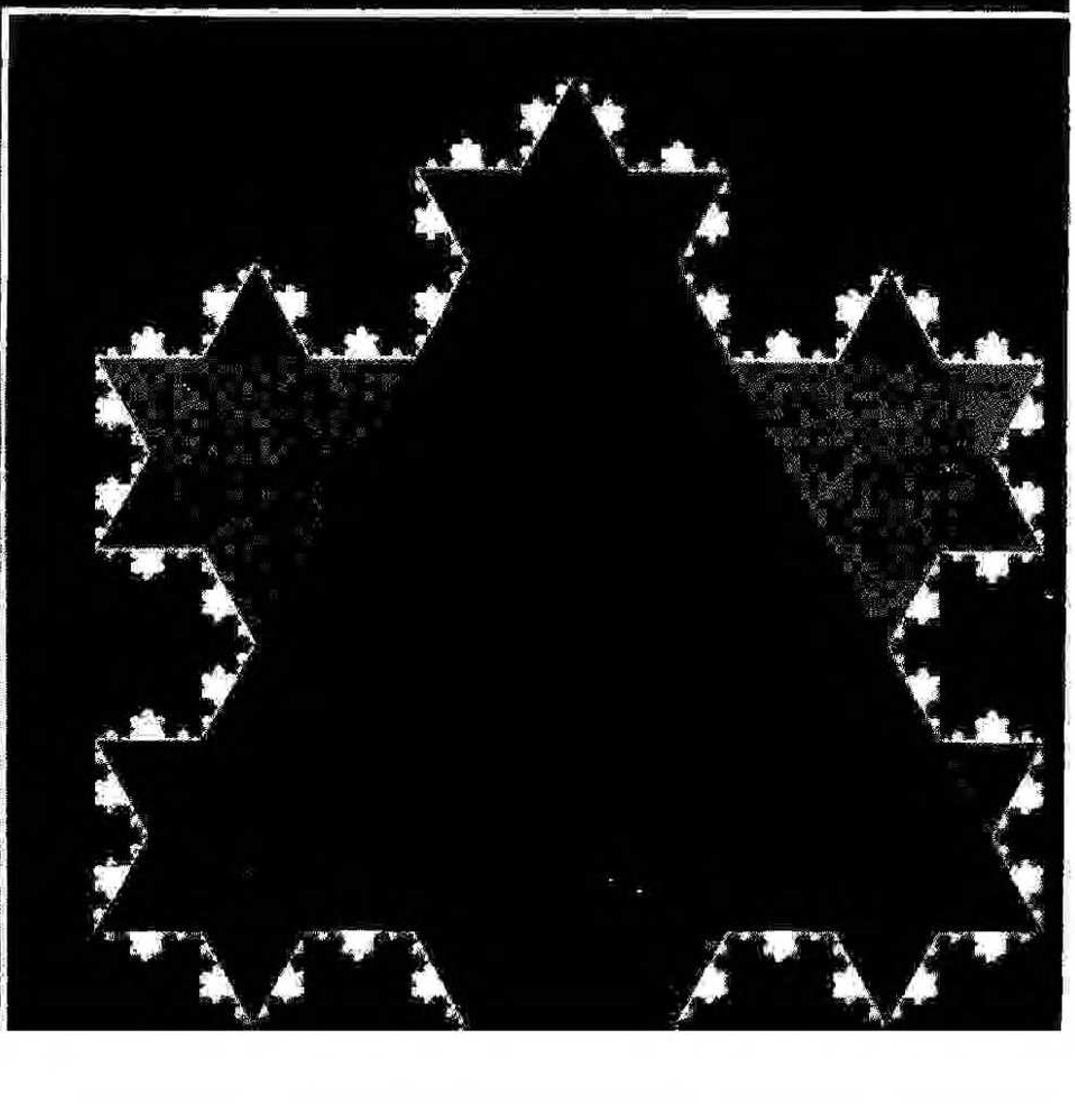
家们带回到动力系统的研究后，我们才听到一位物理学家说："我们必须感谢天文学家和数学家们，他们把这个领域交还我们物理学家时，比起70年前我们把它交出去时，那样子真是大为改善了。"

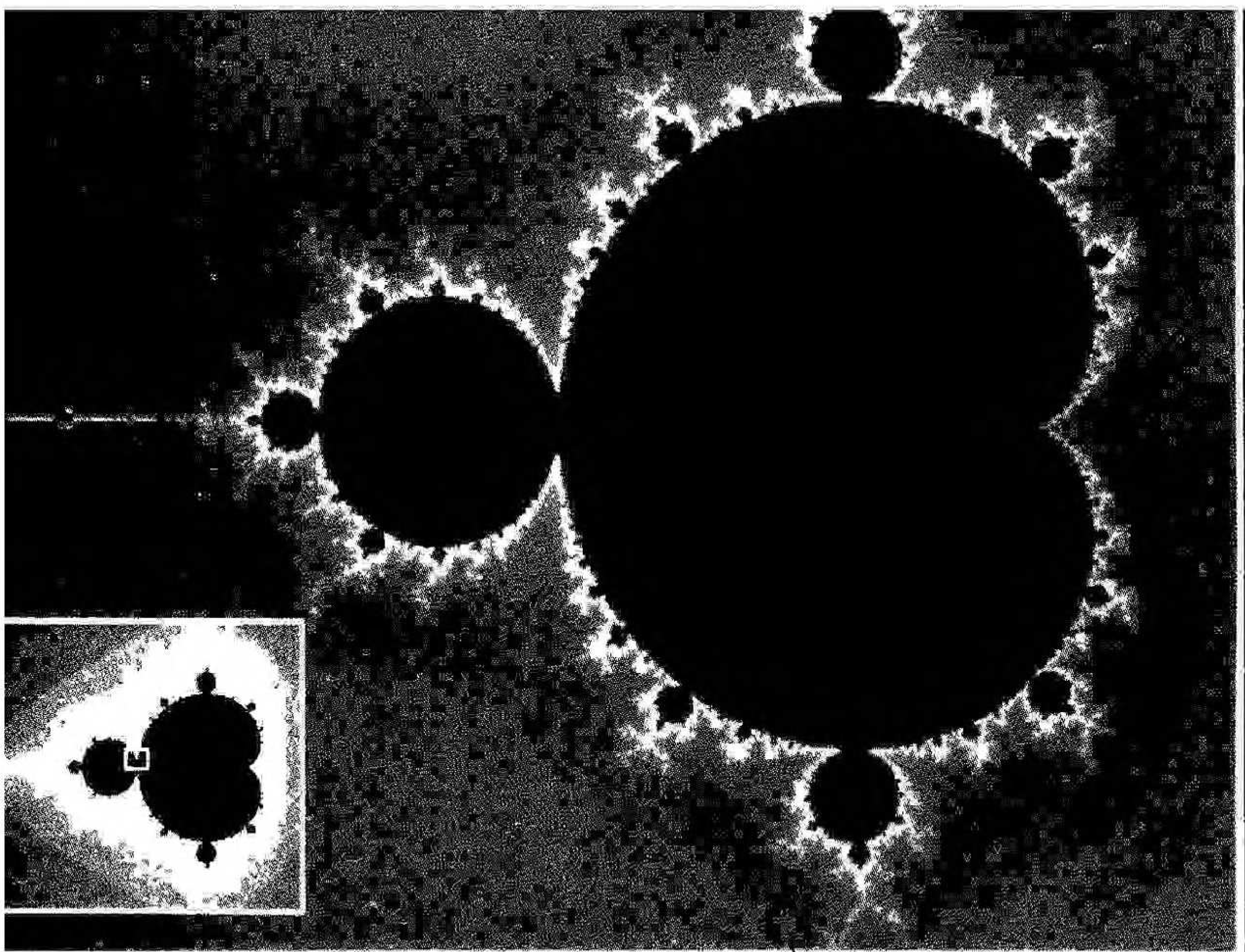
然而，尽管有了斯梅尔和曼德勃罗，毕竟还是物理学家们才把混沌造就成一门新科学。曼德勃罗提供了必需的语言和自然界中奇妙图形的目录。就像曼德勃罗本人所承认的，他的计划的优点在于描述世界，而不是解释世界。他可以列举自然中的要素和它们的分维——海岸、河网、树皮、星系，而科学家们可以用这些数字来作出预言。然而，物理学家们想知道得更多。他们还想知道为什么。自然界中还有一些看不见的形态，它们嵌藏在运动织成的结构中，还有待人们去揭示。



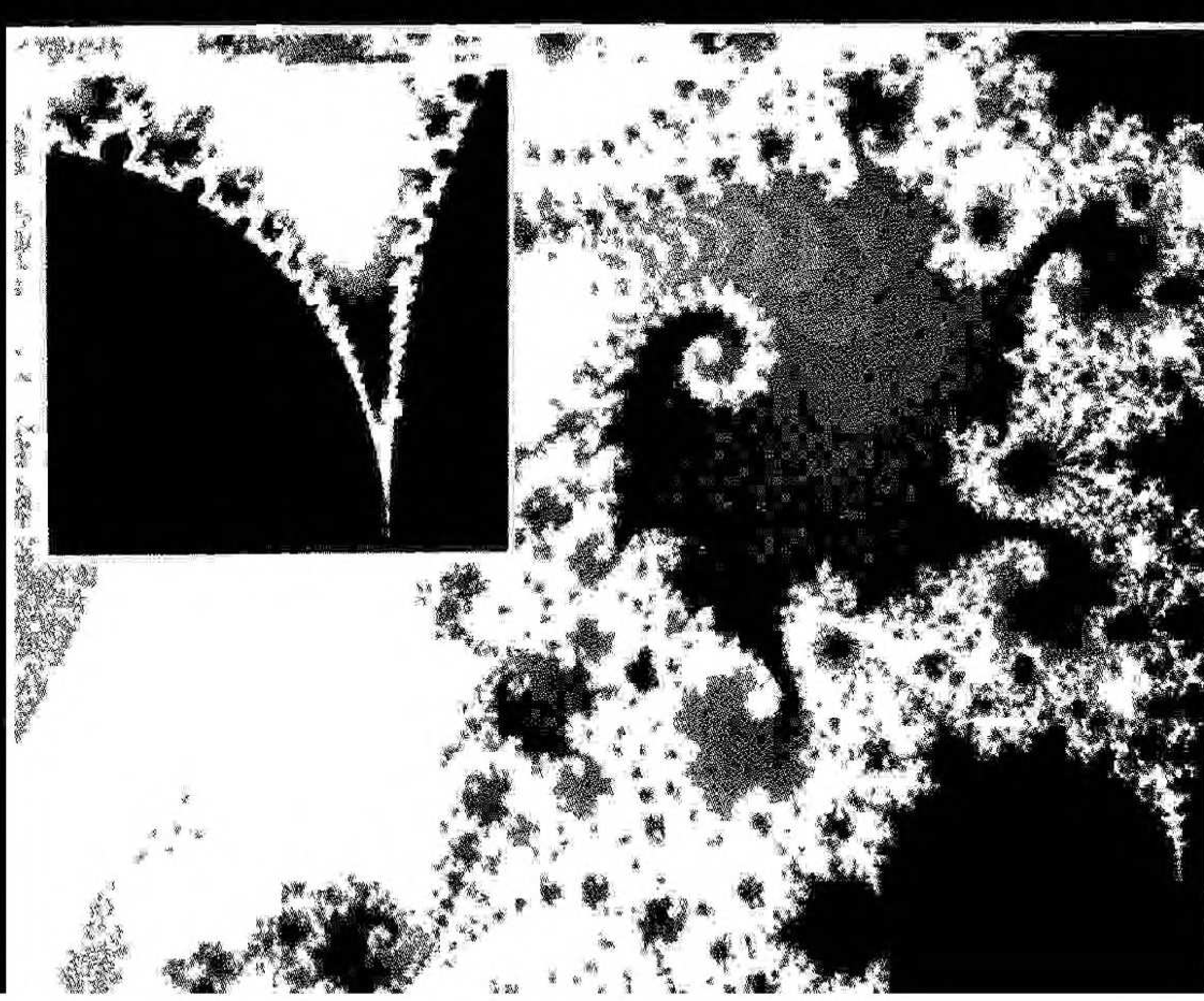
洛伦兹吸引子

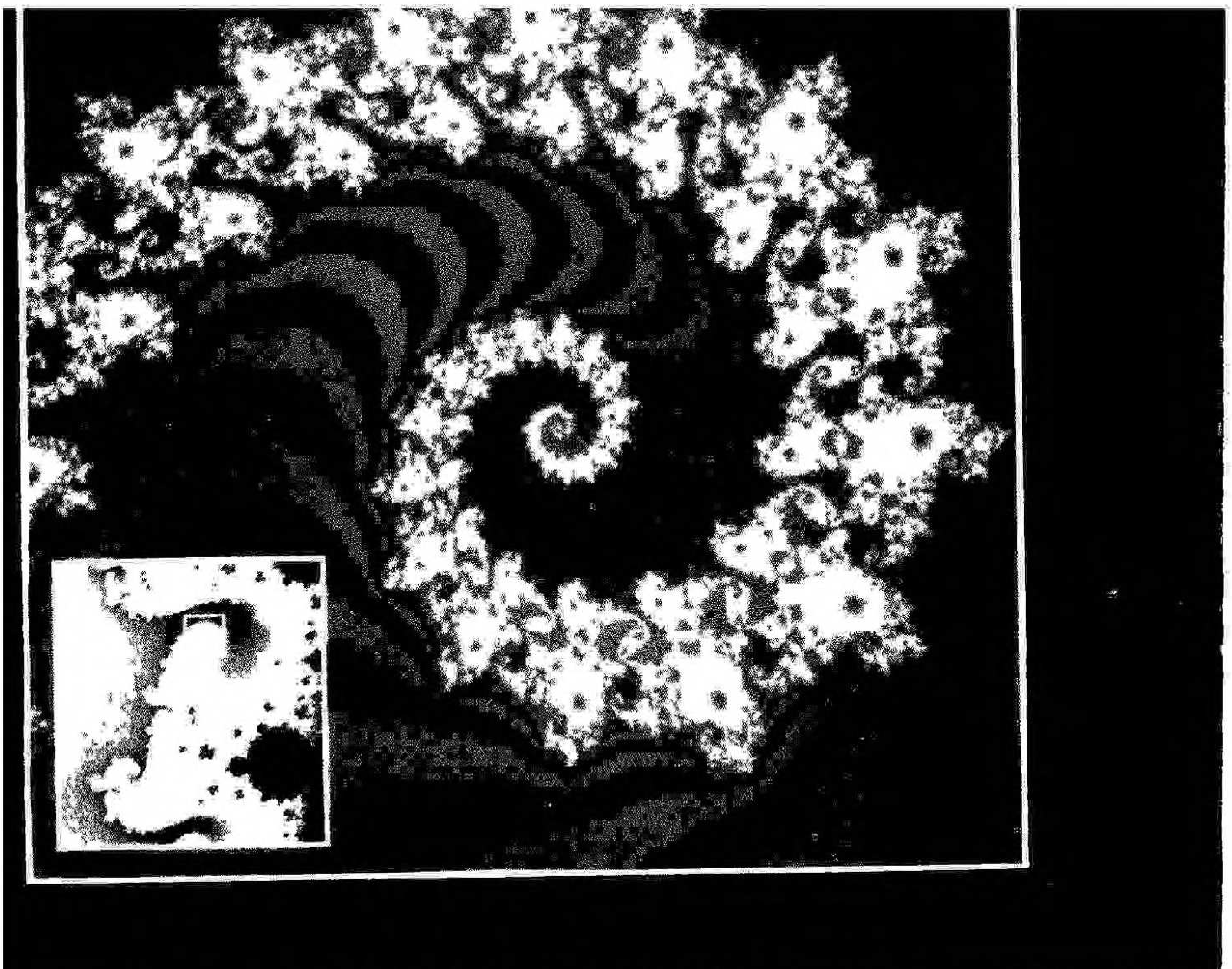
科克曲线

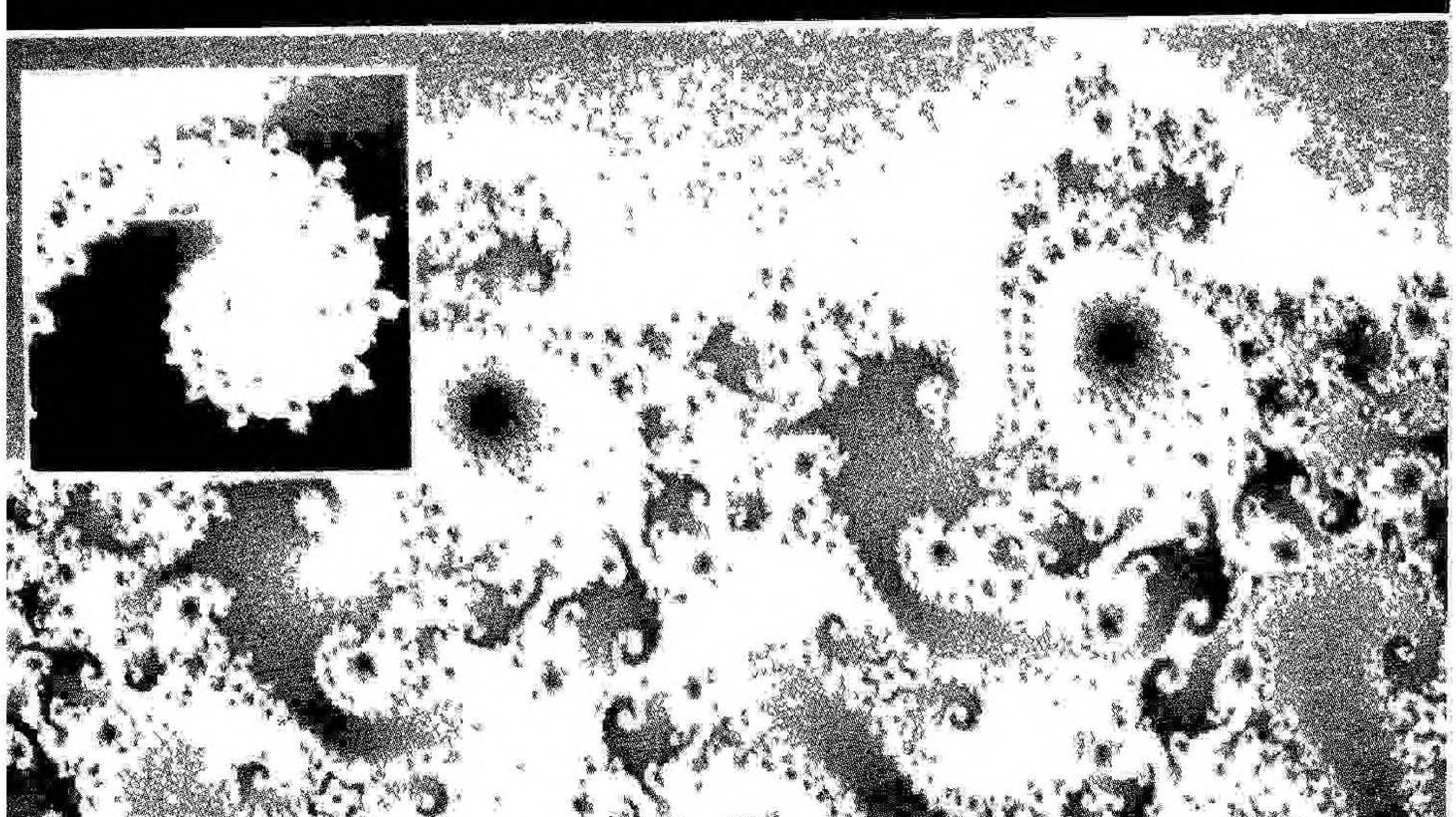


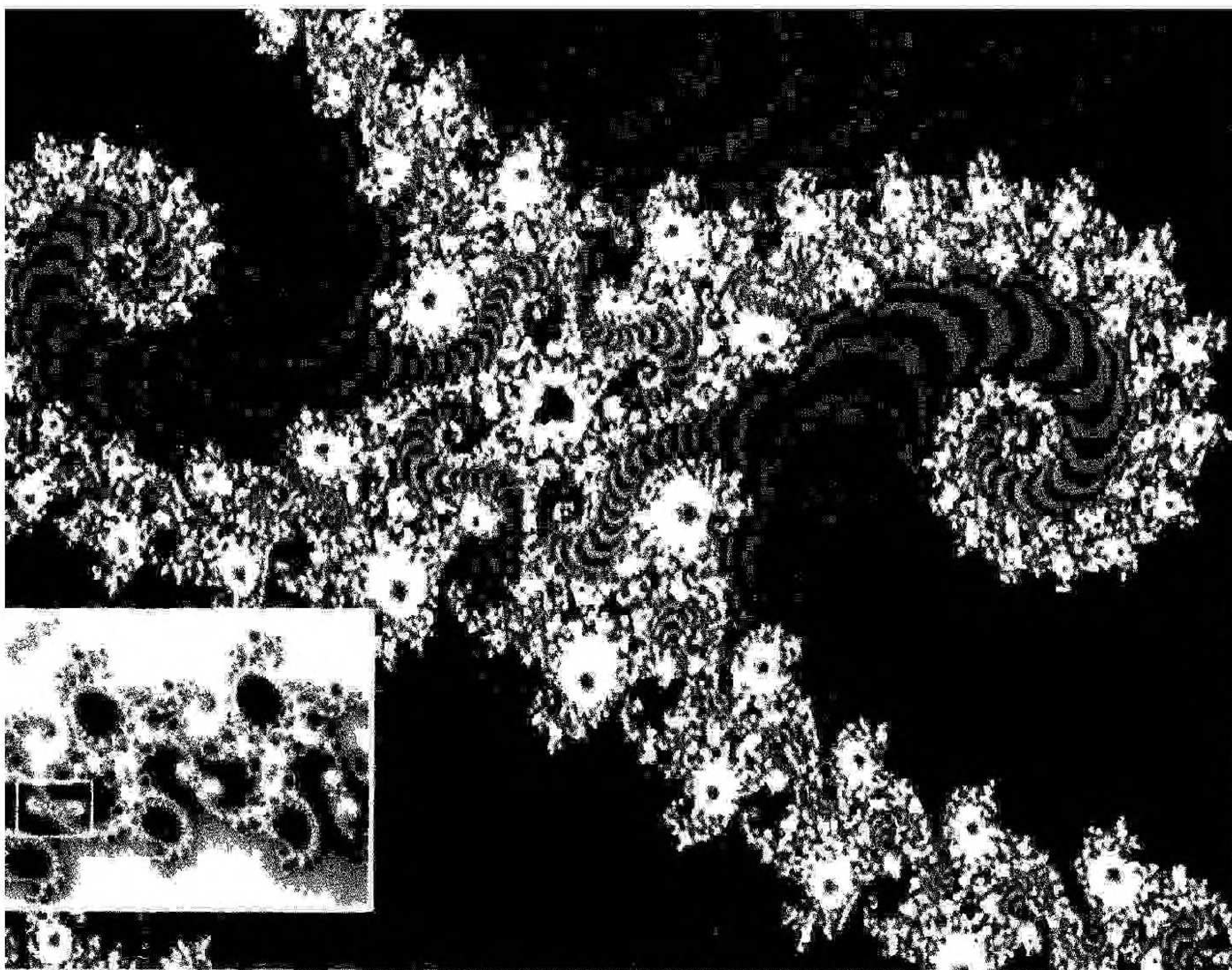


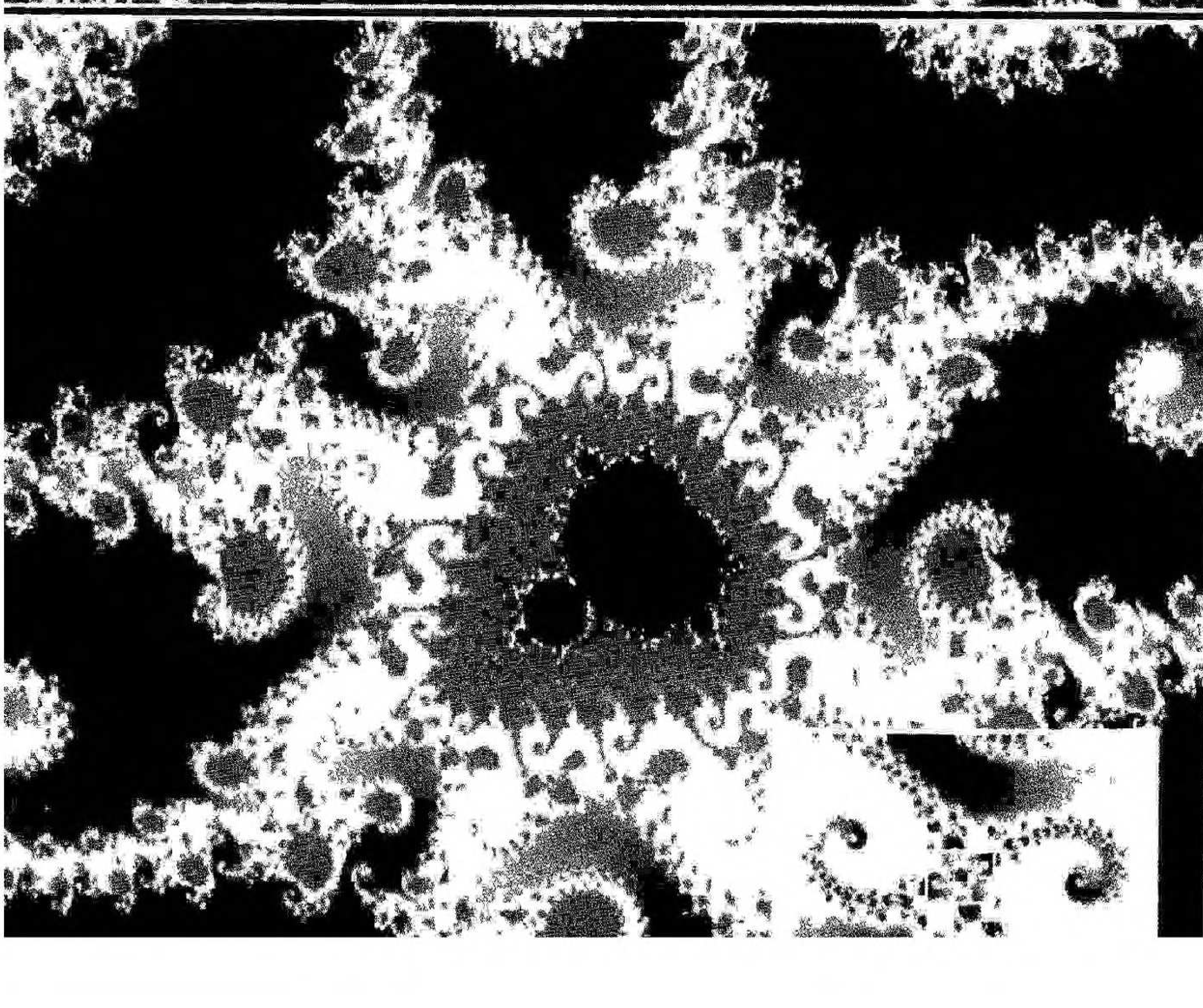
曼德勃罗集。一个越来越精细的尺度上的行程表明了集合的渐增的复杂性，它具有海马尾巴和形如整个集合的岛屿微粒。根据这个结构，在每个方向约放大100万倍。

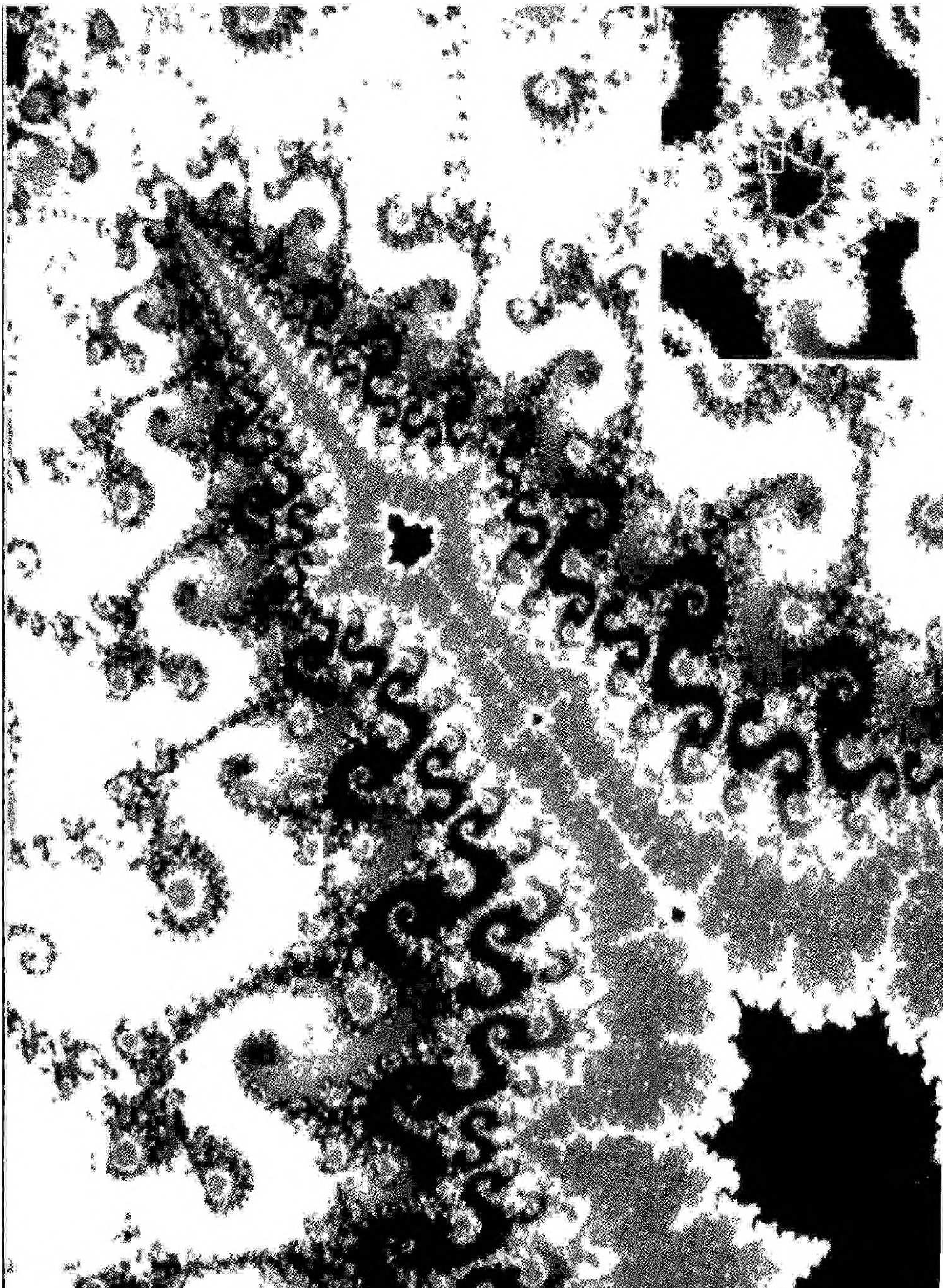


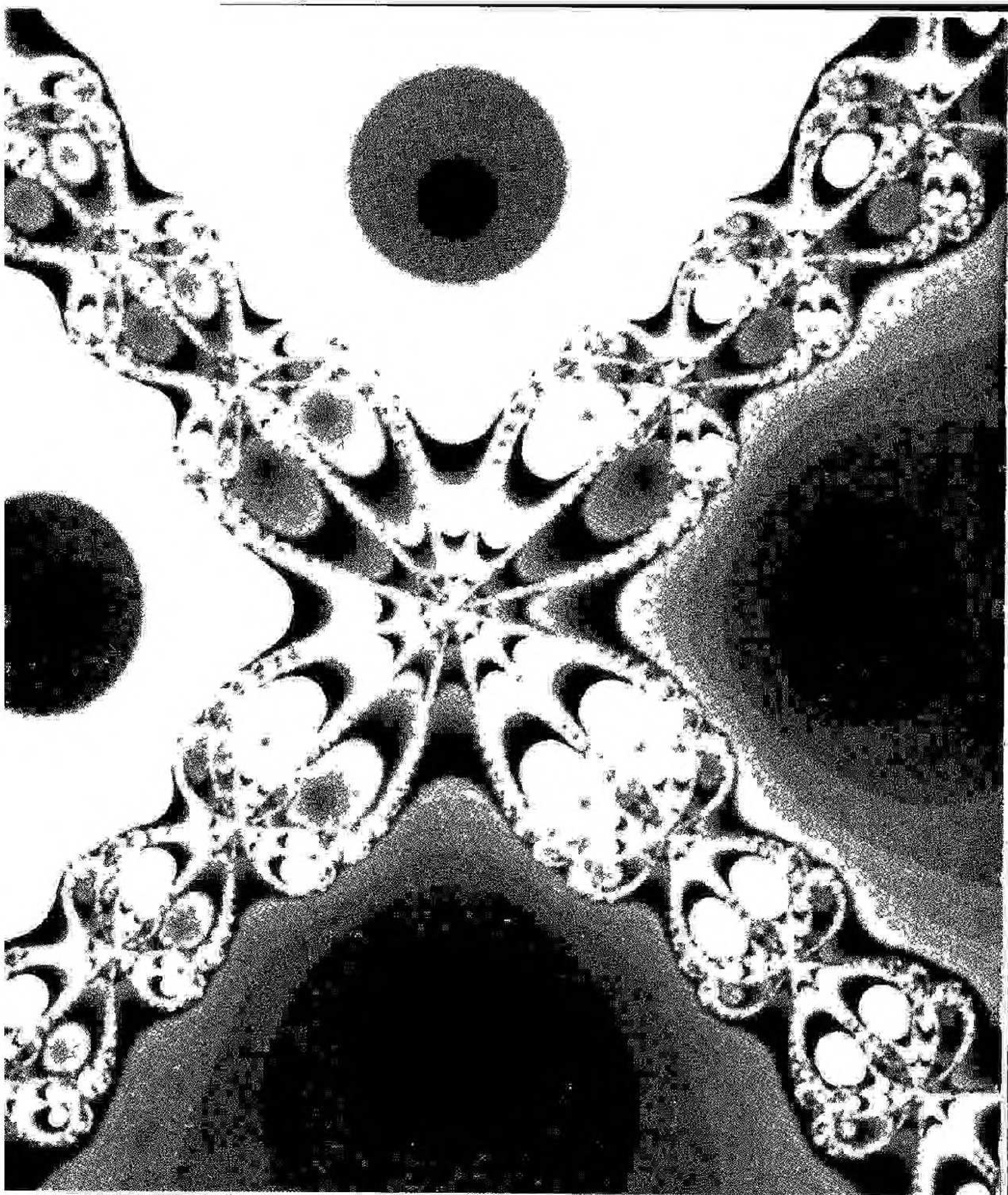








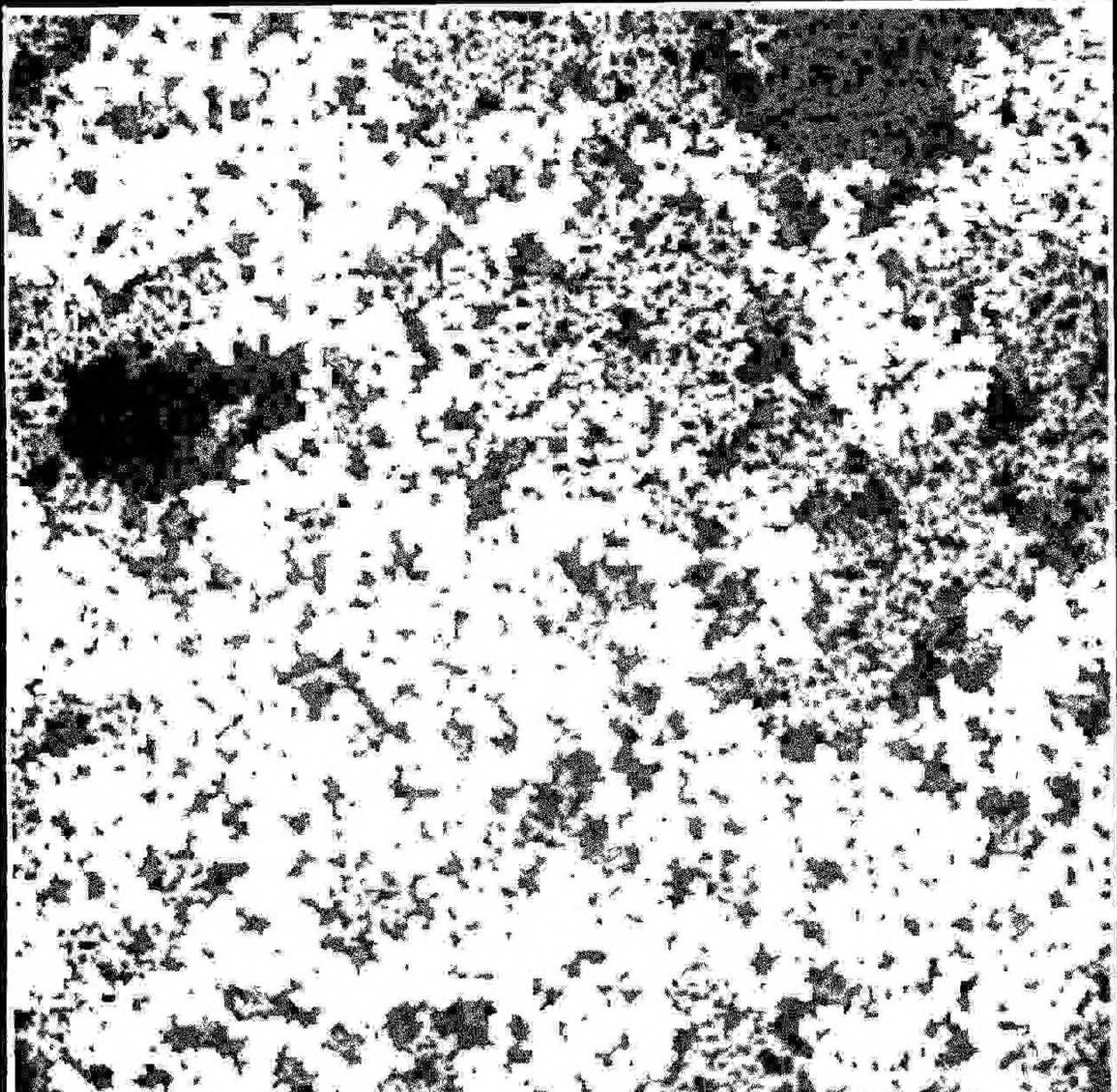




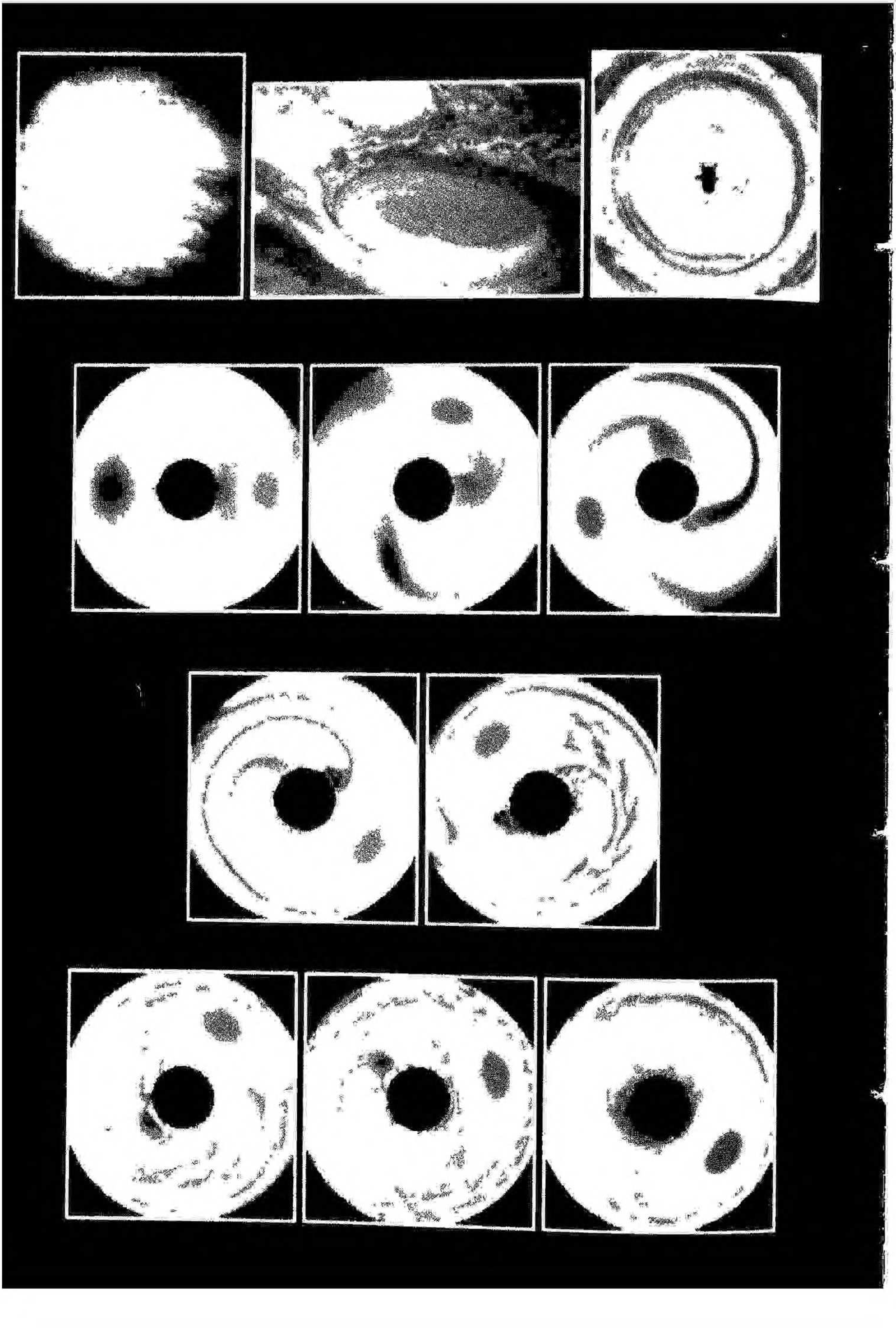
牛顿法的复杂边界。四个黑洞中心的点在吸引，形成各自的“吸引域”，每一个吸引域用不同的颜色表示，它们具有复杂的分形边界。这张图象表示出用牛顿法解方程时，不同的初始点趋向四个解之一的方式(具体方程是$X^4-1=0$)。

（下页图注）
木星大红斑：实况和模拟。旅行者号卫星揭示了木星表面沸腾的液体湍流，中间有东西方向的水平条带。一张图是从行星赤道上空看大红斑，另一张是从南极往下看。

马库斯的计算机模拟图显示从南极看到的情景。颜色表示特定小片流体的旋转方向：反时针转为红色，顺时针转为蓝色。不论从什么样的构形开始，蓝色区域倾向于破碎，而红色区域倾向于合并成单个斑点：不管周围如何骚动，这斑点是稳定和一致的。



分形聚集。计算机产生的粒子的随机聚集产生"渗流网络"，这是分形几何学诱生的多种形象模型之一。应用物理学家们发现这类模型可以模拟现实世界中的多种过程，例如高分子的形成或者油在碎裂岩石中的扩散。渗流网络中的每一种颜色代表彼此连通的一种组合。



6 奇怪吸引子

大螺旋套小螺旋，速度有增；
小螺旋套微螺旋，黏滞乃生。

——理查逊

给上帝出的一道题

湍流是历史悠久的问题。所有伟大的物理学家都正式或非正式地思考过它。平滑的流体碎裂成螺旋和涡流。流体与固体的分界被凌乱的模式破坏。能量极快地从大尺度运动传向小尺度运动。这是为什么？最好的想法来自数学家；对于大多数物理学家来说，湍流是过于危险的课题而不必为之浪费时间。看来它几乎是不可知的。根据传说，量子理论家海森堡临终时在病榻上宣布，他要带两个问题去见上帝：相对论和湍流。海森堡说："我真的相信他对第一个问题会有答案。"①

理论物理学对湍流现象持冷漠态度。实际上，科学家们

在地上划了一条杠杠说，我们不能跨越这条线。就在线的这一边，流体有规则地运动，对此我们还有不少事要做。所幸的是，平滑流动的流体运动时并不像是有几乎无穷多个独立分子，其中每个分子都可能独立运动。相反地，原来靠近的液体始终靠近，就像套上了轭的马一样。只要流体是平静的，工程师们就有计算成规。他们所使用的知识可追溯到19世纪，那时理解液体和气体的运动曾是物理学的前沿问题。

然而到了当代，这些问题不再处于前沿。对于深刻的理论家来说，流体动力学中除了天工莫及的唯一难题，似乎已经没有什么神秘。人们早已明白它的实际方面，这些可以留给技术员们去处理。物理学家们甚至会说，流体动力学其实已经不再是物理学的一部分。它只是工程而已。年轻伶俐的物理学家们有更好的事要干。通常在大学工程系里才能碰到流体动力学家。对于湍流始终突出一种实际要求，而实际要求往往是片面的：设法使湍流消失。对某些应用，湍流也是受欢迎的。例如在喷气发动机里，混合越快燃烧越有效。但在多数情况下，湍流带来灾难。机翼上的空气湍流消灭浮力。输油管中的湍流造成重重阻力。政府和社团的大量资金用于设计飞机、涡轮机、螺旋桨、潜艇外壳和其他在流体中运动的形体。研究者们还得考虑心血管系统中的流动。他们关心爆炸的形状和演化。他们关心涡旋和涡流，火焰和冲击波。从理论上来讲，第二次世界大战中造原子弹的计划是个核物理

---

① 关于这个传说的主人是谁，至少还有四种不同的说法：冯·诺伊曼、兰姆、索末菲和冯·卡尔曼。奥尔themes格说："如果上帝真会对这個位给出答案，那每个人所得都不相同。"

问题。但在实际上，核物理问题在这个计划开始之前就几乎解决完了，而聚集在洛斯阿拉莫斯的科学家们所全力以赴的是流体动力学问题。

那末，湍流究竟是什么呢？它是各种尺度上的一堆无序，大涡流中套着小涡流。它是不稳定的。它是高度耗散的，也就是说湍流耗费能量，形成阻力。这是一种变得随机的运动。然而，流动是怎么从平滑变成湍急的呢？假定有一条完全光滑的管道，一个完全稳定的水源，完全与振动隔离——这样的流动怎么会产生随机成分？

看来，所有的成规都被打破。当流动是平滑的，或者叫层流时，小扰动会消失。但是越过湍流起点之后，这些扰动灾难性地增大。这个起点，这种转变，成了科学的不解之谜。急流下的石缝里冒出来一个转动的涡旋，它增大，分裂，旋转着顺流而下。一缕轻烟从烟灰缸中缓缓飘起，加速，直到超过临界速度而散裂成杂乱的涡流。湍流的发生可在实验室里观察和测量，可在风洞中就任何新的机翼或螺旋桨用实验方法检出，但它的本质却难以理解。传统上，对于湍流的知识一直是特殊而非普适的。就波音707机翼所作的试错研究，对于就F-16战斗机机翼所作的试错研究并无帮助。面对着不规则的流体运动，超级计算机也几乎无能为力。

把流体摇动，激励它一下。流体是黏滞的，因而把能量消耗掉，如果停止摇动，流体自然趋于静止。当摇动时，所加能量是低频长波的，第一件可以注意的事，就是长波分解为许多短波。出现涡流，里面还有小涡流，每个涡流都要消耗流体的能量，都会产生特有的节奏。早在30年代，柯尔莫果洛夫就曾提出一种数学描述，从而可以约略感知这些涡流

的作用。他设想能量经过越来越小的尺度逐级下降，最终达到一个极限，这时涡流已经很小，使黏滞性的相对较大的作用得以发挥出来。

为了清晰地描述起见，柯尔莫果洛夫设想这些涡流充满着流体的整个空间，使得流体处处相同。这个均匀性假定原来是不对的，庞加莱早在40年前就知道这一点，当时他看到在河流的粗糙表面上涡流总是与平滑流动的区域混在一起。涡旋状态是局部化的。能量实际上只在一部分空间中耗散。只要更仔细地观察湍急涡流，在每一个尺度上都有新的平静区进入视野。这样，均匀性假定就让位给间歇性假定。稍稍理想化的间歇图象看上去是高度分形的，粗糙区与平滑区在从大到小的各个尺度上交错混合在一起。这一图象也与现实有差距。

与此密切相关但又极为不同的一个问题是湍流一开始时情况如何。流体怎么越过从层流到湍流的分野？在湍流完全发展起来之前，会出现哪些中间阶段？对于这些问题，有过一个略强些的理论。这个正统范式来自伟大的俄国科学家朗道，他写的流体动力学教科书至今被奉为经典。朗道的图象就是许许多多互相竞争的节奏堆聚到一起。他猜想，当更多能量进入系统时，每次产生一个新的频率，每一个都同既有的频率不相容，就好像强拉小提琴的弦使它产生第二个非谐声的振动，再加上第三个，第四个，直至形成一片无法忍受的噪音。

任何液体或气体都是大量单个小块的集合，其数目之多堪称无穷。如果每一块都独立运动，流体就会有无穷多种可能性，或者用“行话”说，有无穷多个“自由度”，描述相应

运动的方程也就必须包含无穷多个变量。但每个粒子并不独立运动，它在相当程度上依赖于邻近粒子的运动，因此在平滑流动中自由度数目可能不多。潜在的复杂运动仍是互相耦合在一起的。邻近的小块或者保持邻近，或者以光滑、线性的方式互相漂离，造成风洞像片中的干净线条。香烟烟柱中的上升粒子，在开始时刻也保持一体。

然后就出现紊乱，出现神秘的狂野运动的巡回展览。有时，这些运动被取了名字：振荡、脉动、飘摆、扭结、曲折等等。按照朗道的观点，这些不稳定的新运动简单地累积起来，一个叠加在另一个之上，造成速度和尺寸都互相交叠的新的节奏。从概念上说，这种关于湍流的正统思想似乎与事实相符，那末，即使这个理论在数学上没有用处（它确实无用），也只好由它去。朗道的范式曾是既认输又保持体面的方式。

水在管道中流动，或者在圆筒中旋转，发出微弱平稳的嘶嘶声。在头脑中设想增加压力。一种前后振动的节律开始、出现。像波一样，它慢慢地敲着管壁。再加压力。从什么地方冒出来第二个频率，它与前者并不同步。两种频率交叠，竞争，互相冲突。它们形成的运动已相当复杂，相互干扰的波动冲击着管壁，令人几乎目不暇接。现在再次加压。出现第三个频率，然后是第四、第五个等等，全都互不适应。流动变得极其复杂。或许这就是湍流。物理学家们接受了这一图象，但是谁也不知道如何预言增加多少能量就会产生一个新的频率，或者新频率会有多高。没有人在实验中看见这些频率是怎样神秘地来临的，因为事实上从来没有人作过实验来验证朗道的湍流发生理论。

实验室中的转变

理论家用大脑作实验。实验家还必须使用双手。理论家是思想家，而实验家是匠人。理论家可以独往独来。实验家则必须招收研究生，讨好机械工，奉承实验室里的助手。理论家在没有噪声、振动和污垢的洁净处所工作。实验家同具体物品的亲密关系有如泥塑家与黄土，他必须整天搓捏它，使它变形，并占有它。理论家发明出自己的伙伴，就像天真的罗密欧憧憬着理想的朱丽叶。而实验家的情人们流汗、抱怨和唠叨。

实验家和理论家彼此互相需要，但自从每一个科学家集二者于一身的远古时代去而不返之后，在他们的关系中已经有了一些不平等。虽然最好的实验家们本身仍有一点理论家的气质，但反之则不然。归根到底理论家要显得更优越些。特别是在高能物理中，光荣往往归于理论家，而实验家则成为高度专门化的技术员，成天处理着昂贵而复杂的设备。第二次世界大战以来的几十年中，自从物理学为基本粒子的研究所左右，最广为宣传的就是那些用粒子加速器做的实验。自旋、对称、色和味，这些都是富于魅力的抽象。对于许多关心科学的门外汉，甚至对于为数不少的科学家，物理学就是研究原子粒子。但是在更短的时间尺度上研究更小的粒子，意味着更高的能级。因而进行上乘实验所需的设备逐年增加，粒子物理的实验性质也随之变化。这个领域人员众多，大实验又促使建立大队伍。在《物理评论通信》中，粒子物理的论文往往是很突出的：一份典型的作者名单往往要占去文章的

将近 1/4 篇幅。

然而，还是有少数实验家宁愿一两个人单独工作。他们利用手头的具体条件。当流体动力学等领域失去地位时，固态物理日益走俏，终于把它的范围扩展到要求另立新名目："凝聚态物理"，实际上就是材料的物理。凝聚态物理的设备要简单一些。理论家和实验家之间的隔阂也较少。理论家不太势利，实验家也不太处于守势。

即使如此，观点还是不同的。一个理论家完全有资格打断实验家的报告而问道：难道更多点数据不会更有说服力吗？难道那条曲线不是有点乱吗？难道不应当把这些数字往上往下再延伸几个数量级吗？

作为回答，斯文尼也完全有资格挺直他那五短身材，用天生的路易斯安那的风雅加上学来的纽约的粗暴说道："那是对的，如果你有无穷多无噪声数据的话。"然后不屑再谈地转回黑板前，又补上一句，"当然，在现实世界里你只有有限的带噪声的数据。"

斯文尼正在拿材料做实验。对他来说，转折点发生在他是约翰·霍普金斯大学研究生的时候。粒子物理的激动人心是明显的。善于鼓舞的盖尔曼来作了一次报告，斯文尼完全着了迷。可是当他看着研究生们在做什么时，却发现他们不是在写计算机程序就是在焊火花室。就在这时，他开始和一位年长些的物理学家谈话，这位物理学家正开始研究相变——从固体到液体、从非磁体到磁体、从导体到超导体的转变。不久斯文尼有了一间空房子，它比衣橱大不了许多，但确是他一个人的。他有一份设备目录，于是开始订货。很快他有了一张桌子、一架激光器、一些制冷设备和一些探头。他

设计了一台装置来测量二氧化碳在汽液转变临界点附近的导热性质。许多人认为热传导会稍微改变。斯文尼发现它变了1,000倍。这真令人激动——独居斗室，居然发现了别人不知道的事。他看见从临界点附近的蒸汽（任何一种蒸汽）照过来的奇特光线，所谓"乳光"，因为光线的软软散射给出一种半透明的白晕。

相变很像混沌，涉及到只看微观细节似乎难以预言的宏观行为。当固体受热时，它的分子的振动增加了能量。分子向外推，抵抗着它们的键，迫使物体膨胀。热量越多，膨胀越大。然而在某个一定的温度和压力下，发生突然而不连续的变化。一直拉伸着的绳子突然断了。结晶形消失了，分子彼此滑开。它们遵从流体的规律，这些规律是不能从固体的任何方面推演得到的。每个原子的平均能量的改变微乎其微，但材料进入了新的状态——液体、磁体或超导体。

新泽西州贝尔实验室的阿勒斯曾经考察过液体氦中的所谓超流转变，即当温度变低时，材料突然变成没有任何可以觉察的黏滞性或摩擦力的魔术似的液体。其他人研究过超导。斯文尼研究过液汽转变的临界点。到了70年代中期，斯文尼、阿勒斯、贝尔热、郭勒卜、吉格利欧这些全都是从探索相变这个年轻传统中来的美国、法国、意大利的实验家们，正在寻找着新的课题。就像邮递员熟知自己地段的胡同门户一样，他们熟悉物质改变基本状态时的特殊标志。他们研究过物质保持平衡的边缘线。

相变研究是踏着类比的阶石前进的：非磁体到磁体的相变被证明与液汽相变相像。流体到超流体的相变被证明与导体到超导体的相变相像。一种实验的数学分析可以用于其他

多种实验。到了70年代，问题已经基本解决。剩下的问题之一是这一理论可以推广多远。世界上还有没有其他一些变化，在仔细考察时会被证明是相变？

把相变技术用于流体流动，既不是最独创的见解，也不是最明显的做法。它不是最独创，因为流体动力学的伟大先驱者们，即雷诺和瑞利以及20世纪初期他们的追随者们，已经注意到精心控制下的流体实验产生运动的质变——用数学名词说，就是产生分岔。例如，在底部加热的容器中的液体，突然由静止而运动。物理学家们倾向于把这种分岔按物理性质归入物质相变的标题之下。

这种实验所以不是最明显的，是因为这些流体分岔并不像实际相变那样带来物质本身的变化。它们倒是加上了一个新因素：运动。平静的液体成了流动的液体。为什么这类变化的数学描述应该对应于凝聚蒸汽的数学描述呢？

旋转圆柱和转折点

1973年斯文尼在纽约市立大学教书。郭勒卜，这位严肃而又带孩子气的哈佛大学毕业生，当时在黑弗福德执教。黑弗福德是费城附近一处安静的田园般的文理学院，看来并不是一位物理学家的理想归宿。这里没有研究生协助做实验，最重要的师徒合作关系的基础也缺了一半。然而，郭勒卜很喜欢教本科生，他着手把学院的物理系建成一个因实验工作而著称的中心。那一年，他利用一学期的学术休假到纽约去与斯文尼合作。

考虑到相变与流体不稳定性的类似之处，这两个人决定

考察一个经典的液体系统，即在两个垂直圆柱间的液体。内圆柱转动，把液体带动。系统把流动限制在两个柱面之间。这样它就限制了液体在空间可能有的运动，不会出现开放水面上的喷注和尾流。旋转圆柱产生熟知的库埃特－泰勒流。典型情况是内圆柱转动，而外柱静止，这样做起来方便一些。当开始旋转并逐渐加速后，发生第一次不稳定，液体形成优美图案，就像修理站堆放的内胎。沿着圆柱出现面包圈似的条带，一个位于另一个之上。有些水团不仅从东向西旋转，还沿着面包圈向上、向内、向下、向外转动。这些情况人们已经清楚。1923 年泰勒就作过观察和测量。

为了研究库埃特流，斯文尼和郭勒卜造了一套可以放在桌面上的设备，外面的玻璃圆柱的尺寸大致像一只细细的网球筒，约 1 英尺高、2 英寸直径。一只钢圆柱恰到好处地放在里面，只给水留下约 1/8 英寸的空隙。以后几个月内，没想到它吸引了那么多知名人士来参观，其中一位是戴森，他说："这是一套土办法。你们这两位先生在这样的斗室之中，几乎没有分文经费，却做出了绝对漂亮的实验。这是有关湍流的良好定量工作的开端。"

这两位心里想的是那种合理的科学课题会使他们的工作受到大家的赞赏，然后被遗忘掉。斯文尼和郭勒卜试图确认朗道关于湍流发生的思想。实验家们没有理由怀疑这一想法。他们知道流体力学家们相信朗道图象。作为物理学家，他们也喜欢这一想法，因为它与相变的一般图象一致。而朗道本人过去曾提出研究相变理论的最有用的早期框架，那是基于他对这类现象可能遵从普适规律的洞察，亦即共同的规律将压过个别物质的具体差异。在斯文尼研究二氧化碳的液汽临

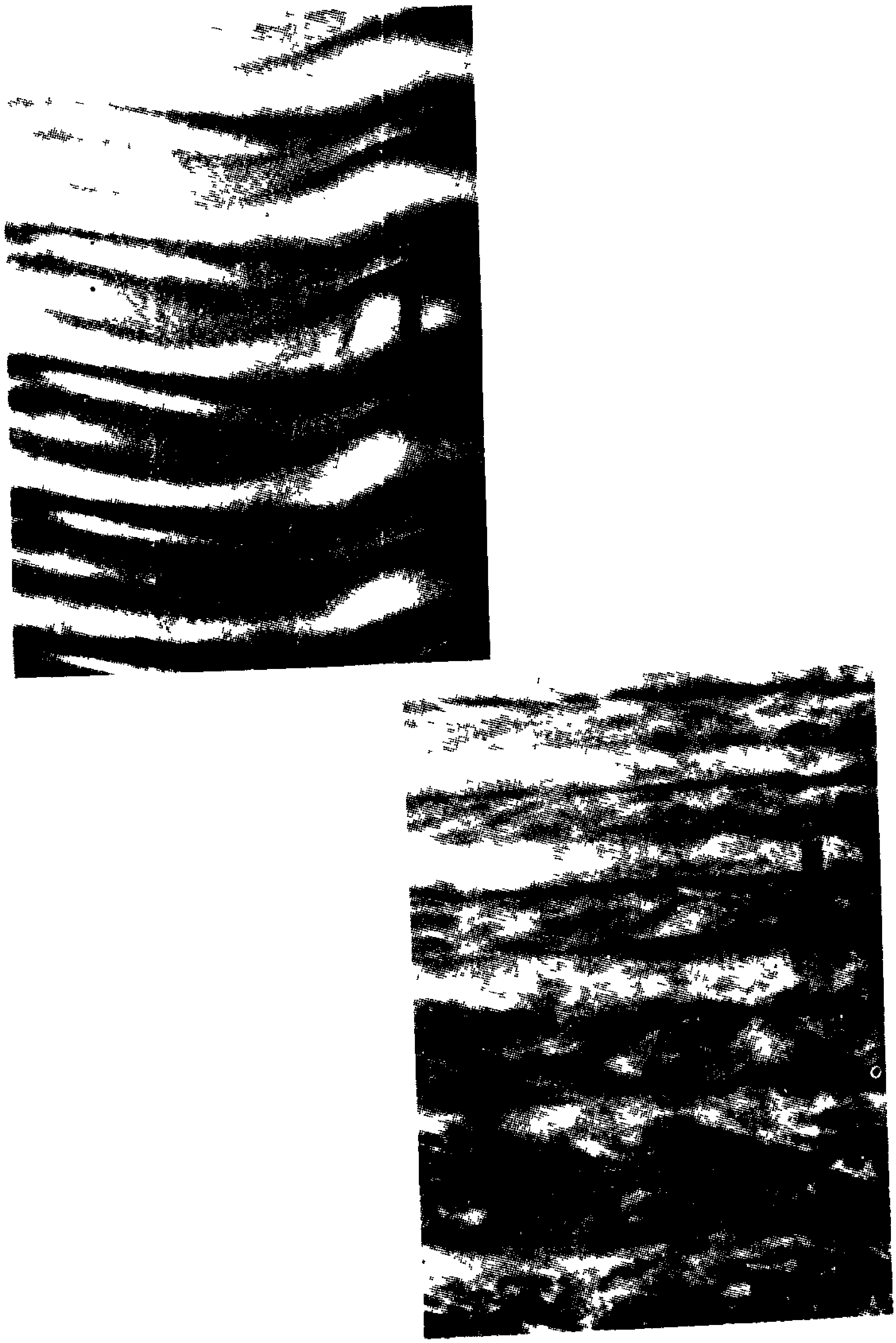


图 6.1 **旋转圆柱间的流动**

水在两个圆柱间的流动花纹为斯文尼和郭勒卜提供了观察湍流发

生的方法。随着旋转速度增大，结构变得更复杂。首先水流形成像堆起来的面包圈那样的特有图案。然后面包圈开始脉动。物理学家们使用激光器来测量每次出现新的不稳定时水速的变化。

界点的时候，他是相信朗道的观念的，即他的研究结果同样适用于氙的液汽临界点——事实上也的确如此。为什么不能证明湍流就是运动流体中持续积累的互相冲突的节律呢？

斯文尼和郭勒卜准备依靠多年来在最精巧的环境中研究相变而建立的干净利落的实验技术，来战胜乱糟糟的流体运动。他们的实验风格和测量设备是流体动力学家们从来不曾想象过的。为了探测滚动水流，他们使用激光束。穿过水流的一束光线会产生偏转或散射，这可用称为“激光多普勒干涉量度学”的技术来测量。而数据流可以用计算机存储和处理——在1975年这还很少见于桌面上进行的实验。

朗道曾说过，当流速增大时新的频率会逐个产生。斯文尼回忆说：“我们读完之后说，那好吧，我们就来看一下这些频率冒出来时的转变。于是我们开始观察，清楚得很，是有一个明确的转变。我们来回通过这一转变，使圆柱的转速升高和降低，这转变是非常确定的。”

当开始报告工作结果时，斯文尼和郭勒卜遇到了科学中的一种社会边界，即在物理学领域与流体动力学领域之间的边界。这个边界具有一些鲜明的特点。首先，它决定国家科学基金会中哪一个机构负责对他们提供资助。到了80年代，库埃特-泰勒实验又成了物理学，可是在1973年，那只是平常的流体动力学。对于那些习惯于流体动力学的人们，从纽约市立大学这个小小的实验室里出来的第一批数据干净得令人

生疑。流体动力学家们干脆不信。他们不习惯于用相变物理那种精密风格做实验。更有甚者，从流体动力学角度，很难看出这类实验的理论意义。当斯文尼和郭勒卜再次申请基金时，他们被拒绝了。有些评议人根本不承认他们的结果，而另一些人说其中毫无新鲜之处。

然而，实验从未停下来。斯文尼说，“是看到了这个明确的转变。这太棒了。于是我们继续去找下一个转变。”

可是预期的朗道序列中断了。实验未能证实理论。在下一次转变时，流体一下子跳进一种令人迷惑的状态，什么周期也区分不出来。没有新的频率，复杂性也不是逐渐建立的。“我们发现，它变成混沌的。”几个月后，一位瘦瘦的、十分可爱的比利时人出现在他们的实验室门口。

茹厄勒的湍流思想

茹厄勒曾经说过物理学家分为两类，一类是靠拆收音机成长起来的——那是在固态前的时代，人们还能看到导线和闪着桔黄辉光的真空管，并且设想电子如何流动，另一类是玩化学设备的。茹厄勒是玩化学设备的，但并不是后来美国人讲的设备，而是他家乡比利时北方药房中乐意配制的试剂，爆炸性或毒性的。茹厄勒自己把它们混合，搅拌，加热，结晶，有时还使之爆炸。他1935年生在根特，是一位体育教师和一位大学语言学教授的儿子。虽然他在科学的抽象王国中发展他的事业，但也喜爱自然界的危险方面，爱好那些藏在隐花植物的真菌蘑菇或是硝石、硫磺、木炭中的出人意料的东西。

茹厄勒对探索混沌的持续贡献则是在数学物理方面。到1970年时，他已经加入了巴黎郊外的高等科学研究所，这是一个以普林斯顿高等研究所为模式的单位。这时他已经养成一种终生的习惯，要经常离开研究所和家庭，只带一个背包到冰岛的空荡的原野或墨西哥农村去独自散步，一去就是几个星期。他常常一个人也见不到。当他偶尔遇见一些人并且接受他们的款待——这可能是一餐玉米饼，没有油、肉和蔬菜——时，他觉得自己看到了两千年前世界曾经如何存在。回到研究所之后，他又开始自己的科学生活，这时面色可能稍嫌憔悴，圆额尖颊之间的皮肤也绷得更紧一些。茹厄勒听过斯梅尔关于马蹄映象和动力系统中混沌可能性的报告。他也思考过湍流和经典的朗道图象。他怀疑这些思想是相反相成的。

茹厄勒对于流体流动没有经验，不过这并没有使他泄气，就像他的许多不成功的先驱者并未因之而泄气一样。他说："新事物总是被非专家发现的。不存在自然而深刻的湍流理论。所有能对湍流提出的问题都带有较一般的性质，因此能为非专家们理解。"很容易看出来为什么湍流难以分析。流体流动的方程是非线性偏微分方程，除特殊情况外不可能求解。虽然如此，茹厄勒还是提出了另一种抽象图景来代替朗道的设想。他是基于斯梅尔的语言，把空间看成柔韧的材料，可以挤压、拉伸和折叠成马蹄那样的形状。他和一位来所访问的荷兰数学家塔肯斯合写了一篇论文，发表于1971年。论文的风格毫无疑问是数学式的——物理学家们请注意！——每一小段都是由"定义"、"命题"、"证明"开始，接着是不可避免的提法："令……"

“**命题** (5.2)。令 X_μ 为希尔伯特空间 H 上的单参数 C^k 矢量场族，使……”

然而，论文的标题却宣布了与现实世界的联系：“论湍流的本质”，有意地呼应了朗道的著名标题：“论湍流问题”。茹厄勒和塔肯斯论据的明确目的超乎数学；他们想取代关于湍流发生的传统观点。他们不是堆起大量频率，形成无穷多独立的交叠运动，而是提出只要三个独立运动就可以产生湍流的全部复杂性。从数学上讲，他们的某些逻辑是模糊、错误或借用的，或者三者都有——甚至在15年以后仍然是众说纷纭。

但是交织在这篇论文中的洞察力、评论、旁注和物理，使它成为一篇耐读的文章。最有引诱力的要算是作者们称为“奇怪吸引子”的一种形象。茹厄勒后来感到，这个短语从心理分析的角度看是有“启发性”的。它在混沌研究中的地位使得他和塔肯斯就谁首先使用了这一词语而礼貌地争执了一番。实情是两个人都不大记得了，但是塔肯斯这个高大的、满面红光的、健壮的北欧人会说：“你问过上帝他是否创造了这个该死的世界吗？……我什么也不记得了。……我常常创造而不去记住它。”而论文的主要作者茹厄勒会轻声评论道：“塔肯斯恰好在所里访问。不同的人不同地工作。有些人努力要完全由自己写出一篇论文来，这样他们就占有了全部荣誉。”

奇怪吸引子存在于相空间中，而相空间则是现代科学最强有力的发明之一。相空间给出一种把数字变成图象的方法，它把具有运动部分的（机械的或流体的）系统的每一点实质性信息都抽象出来，灵活地为它的一切可能性画出道路图。物

理学家们已经同两类简单些的“吸引子”打过交道：不动点和极限环，它们各自分别代表着达到定态或不断自我重复的行为。

在相空间中，关于动力系统在单一给定时刻的知识的完全状态归结为一个点。这个点就是该时刻的动力系统。但在下一个时刻，系统会改变，永远是稍稍改变，于是这个点就运动着。系统的时间史可以用这个运动的点画出来，只要随着时间的过去，追踪这个点在相空间中的轨道就成了。

有关一个复杂系统的所有信息怎么能存储在一个点里呢？如果系统只有两个变量，答案是简单的。这从高中里教的笛卡儿几何就可以知道——一个变量在横轴上，另一个变量在纵轴上。如果这个系统是一个摆动着的无摩擦的摆，那末一个变量是位置，另一个变量是速度，它们都连续变化，造出一条点线，它最终形成闭环，一遍一遍地重复转下去。同一系统在能级更大时——摆动得更快更远时——在相空间中形成一个与前者相似但更大的闭环。

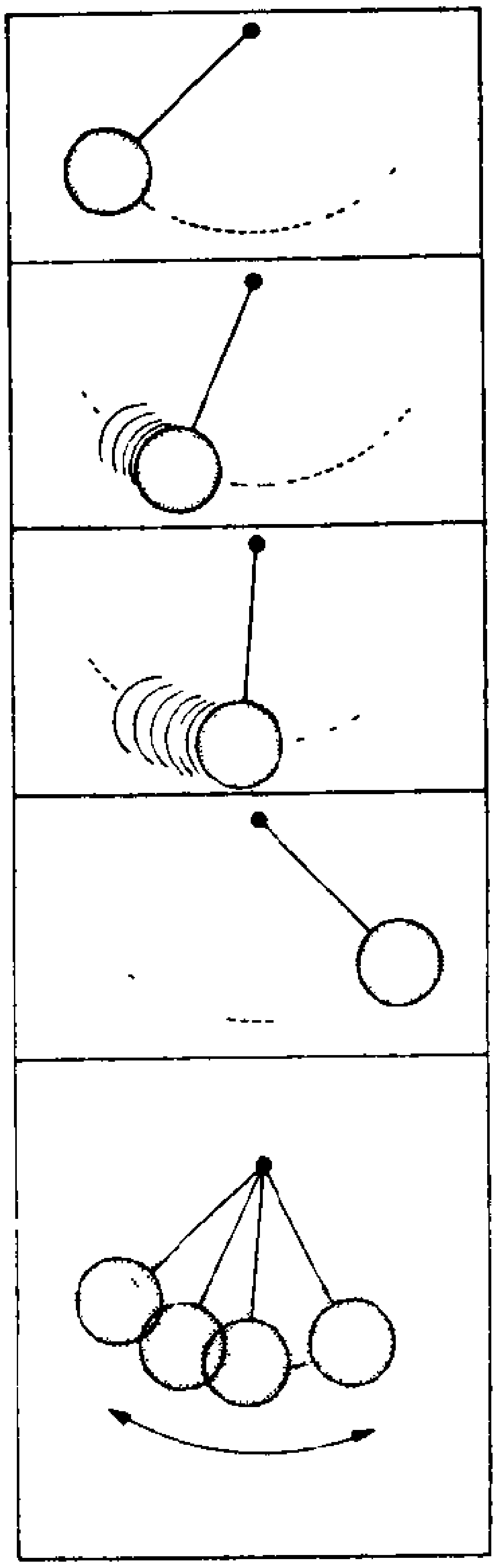
一点点现实主义，例如加上摩擦，就改变了图象。我们不必用运动方程就可以知道一个受到摩擦的摆的命运。每一条轨道最终都必须结束于一点，即中心点：位置 0，速度 0。这个中心不动点“吸引”所有的轨道。他们不是永远地转圈，而是螺旋地转进来。摩擦要消耗系统的能量，而在相空间中耗散表现为拉向中心，从高能量的外区拉向低能量的内区。这个可能有的最简单的吸引子，很像嵌在一片橡皮中心的小磁铁。

把状态设想为空间中的点的一个好处是易于观察变化。变量连续地上下变化的系统成为一个运动的点，就像一只苍

蝇在房间里飞绕。如果变量的某些组合永远不出现，则科学家们可以简单地设想房间的某一部分在边界之外。苍蝇永远也不飞到那里。如果系统的行为是周期的，一次再次地转回同一状态，则苍蝇也在绕圈飞，一次再次地通过相空间的同一位置。物理系统的相空间图象揭示用其他方式所看不见的运动模式，就像红外线地形照片可以揭示非感官所及的图形和细节一样。当科学家观看相空间中的图象时，他可以发挥想象力来回想系统本身。这个圈对应于那个周期性。这个扭转对应于那种变化。这一片空白对应于那种物理上不可能的状态。

甚至于在二维情形中，相空间图也包含着许多令人感到意外的特点；用桌面上的计算机把方程变成彩色的运动轨道，就可以容易地演示某些特点。某些物理学家开始拍摄电影和录像带给同事们看；加州的某些数学家出版了用绿、蓝和红色绘制成连续漫画的书，一些同事不无讥讽地说，这是“混沌连环画”。二维不能概括物理学家们需要研究的种种系统。他们必须表示更多的变量，即要用更多的维数。动力系统的每一个可以独立运动的部分给出另一个变量，另一个自由度。每一个自由度在相空间中要求新的一维，才能确保单个点包含足够的信息来唯一地确定系统的状态。梅所研究过的简单方程是一维的——单个的数就够了，这个数可以代表温度或种群数，这个数决定一维线段上一个点的位置。洛伦兹的剥光了的对流模型是三维的，不是因为流体在三维空间中运动，而是因为它要求用三个不同的数来确定任何时刻的流体运动状态。

获得四维、五维，乃至更多维空间的视觉形象，对于许

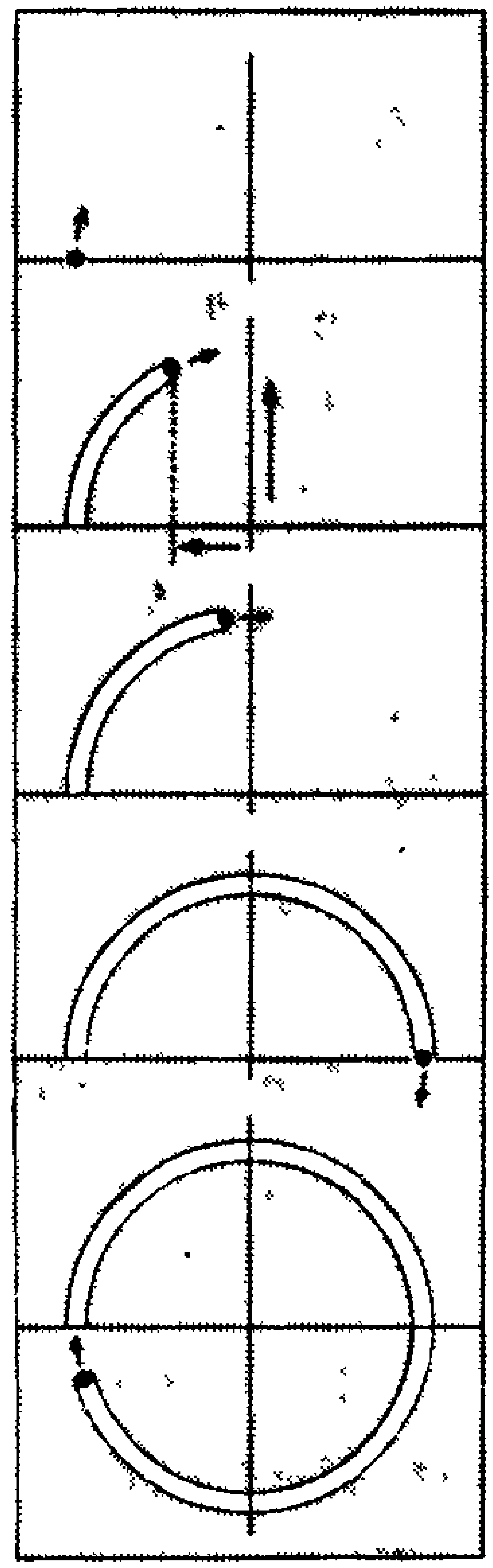


摆开始摆动时速度为零。位置是负数，即位于中心左面一定距离。

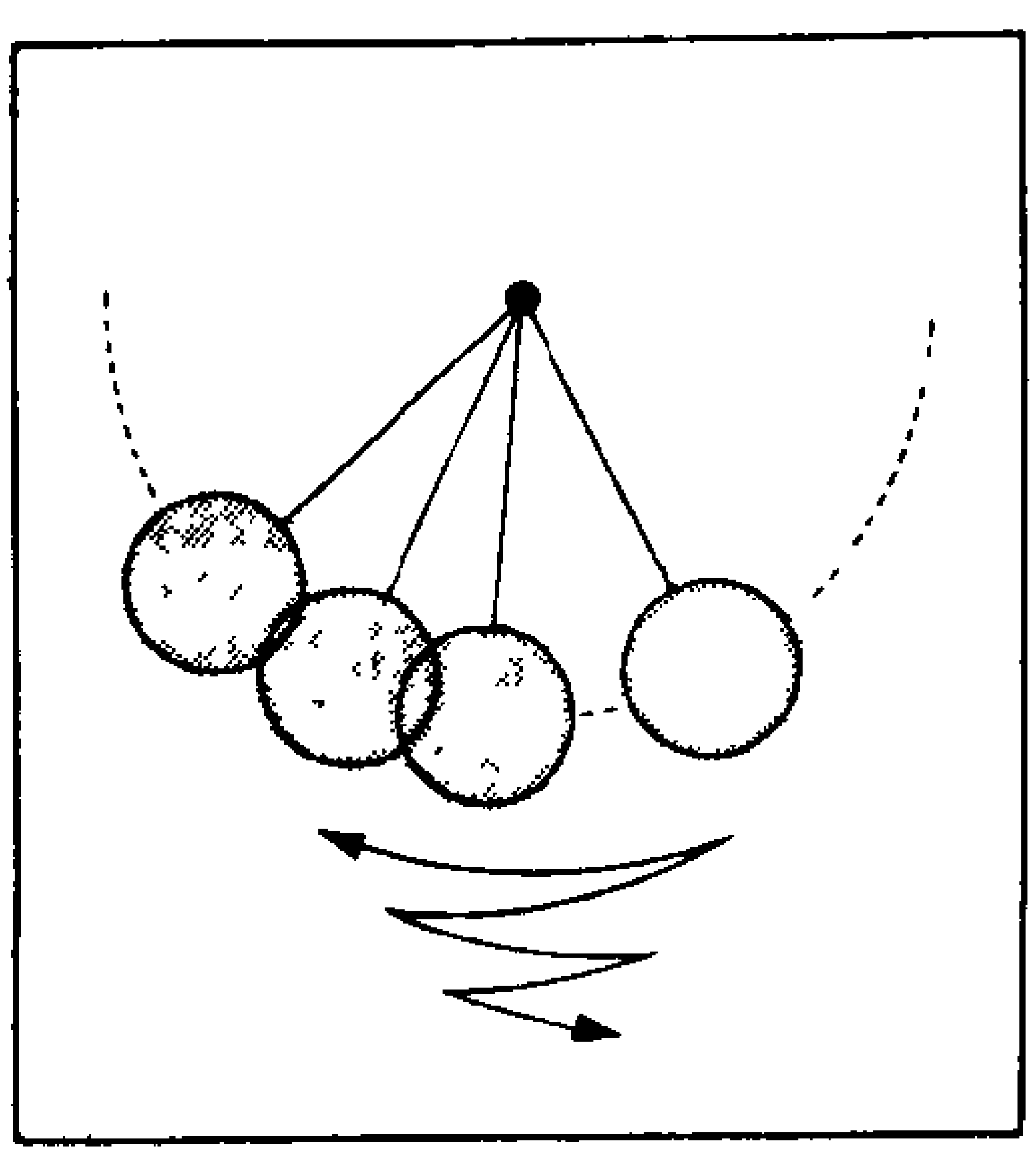
这两个数规定二维相空间中的一个点。

当摆的位置经过零时，速度达到最大值。

速度再次降到零，然后成为负值以代表向左的运动。



观察摆的另一种方法。相空间中的一点（右上图）、包含关于动力系统在任何时刻的状态的全部信息（左上图）。对于单摆，一共只需要知道两个数：速度和位置。



这些点形成一条轨道，它提供了使动力系统的连续长期行为形象化的方法。一个重复的环代表按照有规则的间隔不断自我重复的系统。

如果这种重复行为像摆钟那样稳定，则小扰动后系统还回到这个轨道。在相空间中，一切靠近这条轨道的运动都趋向于它，它就是一个吸引子。

多最敏锐的拓扑学家也不是轻松之举。但是复杂系统具有许多独立变量。数学家们必须承认这一事实，即具有无穷多自由度的系统要求无穷维的相空间。不受拘束的自然界经常用无穷多自由度来表现自己——湍急的瀑布、不可预言的大脑都是例子。但是谁能对付这样的东西呢？这是希腊神话中冷酷无情、无法控制的九头蛇，这是朗道的湍流形象：无穷多个模，无穷多自由度，无穷维。

相空间中的环

物理学家有理由不喜欢对阐明自然功效甚少的模型。从流体运动的非线性方程出发，世界最快的超级计算机也只能对 1 立方厘米的湍流精密跟踪几秒钟。当然，这只能怪大自然，不能怪朗道；即使如此，朗道图象毕竟与事实格格不入。在缺乏知识时，物理学家们可以怀疑某种原理还未被发现。伟大的量子理论家费曼曾经表述过这种感觉。“有一点总

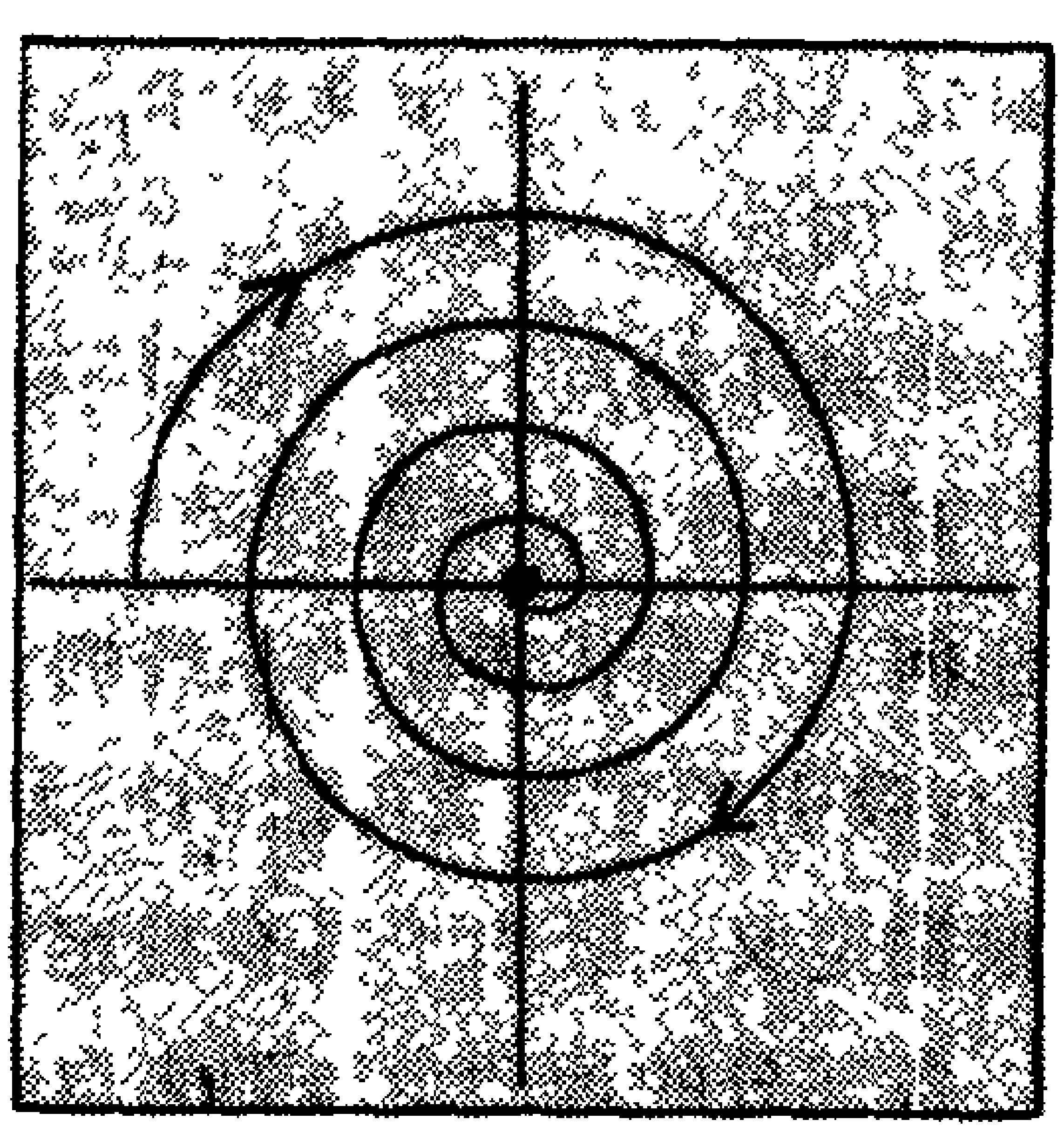


图 6 3

吸引子可以是单个的点。对于不断由于摩擦而失去能量的摆，所有的轨道都向内盘旋，达到一个代表着定态的点——在这个具体情形中，定态就是完全不动。

使我不安：根据我们今天已经懂得的定律，不管一块空间多么小，一段时间多么短，一台计算机总是要用无穷多次逻辑操作才能确定其中的情形。在那么小一块空间中怎么能有那么多事情？为什么为了确定极小一块时空中的事，要用无穷多的逻辑？”

同许许多多开始研究混沌的人一样，茹厄勒也怀疑在湍流中所见到的图象——自相缠绕的流线，螺线形的涡旋，在眼前出现而又消失的螺旋——必定反映了一种用至今尚未发现的定律才能解释的图形。在他的思想中，湍流中的能量消耗必然要导致相空间的收缩，从而收向吸引子。当然，这个吸引子不会是不动点，因为流动永远静止不下来。能量一面在注入系统中，一面在消耗掉。那它可能是什么其他种类的吸引子呢？根据教条，只存在另一种吸引子，即周期吸引子，或者叫极限环。这是一条吸引附近所有其他轨道的轨道。如果一个摆从弹簧取得能量，而通过摩擦失去能量，也就是说，它既受驱动又有阻尼，一条稳定轨道就可能是相空间中的一个闭环，它代表老祖父的挂钟的规则摆动。无论从何处启动，它最终都进入这同一个轨道。真是这样吗？对于能量最低的那些初始条件，摆仍然会停下来，因此这个系统事实上具有两个吸引子：一个是闭环，另一个是不动点。每个吸引子有自己的“吸引域”，就像两条靠近的河流各有自己的流域一样。

就短时间而言，相空间中任何一点都代表动力系统的一种可能行为。就长时间而言，只有吸引子才代表可能的行为。其他类型的运动都是瞬态的。根据定义，吸引子具有稳定性这一重要性质。在实际系统中，各部分的运动会碰到来自外界噪声的冲撞和摇晃，运动还倾向于回到吸引子。一次冲撞

可能短暂地把轨道推开，但是它所引起的瞬态运动会消失。即使一只猫去敲了一下摆钟，它也不会变到每分钟 62 秒。流体中的湍流是一类不同的行为，它永远不产生排除其他节律的单一节律。湍流的一种熟知的特性，就是各种周期的宽频带全部存在。湍流像是白噪声，或是静电干扰。这样的情形能够来自简单的、决定论的方程组吗？

茹厄勒和塔肯斯关心是否有其他类型的吸引子，它们具有合适的一系列性质。稳定性——代表在有噪声的世界中动力系统的最终状态。低维性——在长方形或方盒子似的只有少数自由度的相空间中的一条轨道。非周期性——永不自我重复，永不落入老祖父挂钟的规则节律。从几何上讲这是一个难题：在有限空间中能画出什么样的轨道，使它既不自我重复也不自交——因为一旦系统回到过去到过的状态，它就要重走老路。为了产生一切节律，这条轨道必须是有限面积中的一条无限长的线。换一个名词——不过这个词当时还没有创造出来——说，它必须是一个分形。

茹厄勒和塔肯斯靠数学推论断言，必然存在这样的东西。他们自己从来没有见过，也没有在文章里画一个。但是这个论断已经足够了。后来，茹厄勒在华沙国际数学家大会全体会议上发表演说时，以事后回顾的轻松心情说："科学界对我们的建议反应十分冷淡。具体说，连续谱会与少数自由度结合起来这一观念，被许多物理学家们视为异端邪说。"不过正是物理学家们——更确切地说，是少数人——认识到 1971 年那篇论文的重要性，并着手阐明它的涵义。

千层饼和香肠

事实上 1971 年之前科学文献中已经有那么一小张用线条绘制的图，它画的就是茹厄勒和塔肯斯试图赋予生命的那种难以想象的怪兽。洛伦兹在 1963 年关于决定论混沌的论文里附了这张图，图中右边只有两条曲线，一个套在一个之内，而左边有 5 条。为了画这 7 个环，计算机要作 500 次相继的计算。在相空间中沿着这条轨道绕环运动的一点，演示了洛伦兹三个方程的对流模型中流体缓慢的混沌转动。由于系统包含三个独立变量，这个吸引子存在于三维相空间中。洛伦兹只画了一小部分，然而他看到的比画出的要多：这是一种双螺旋，好像以灵巧绝顶的方式交织起来的一对蝴蝶翅膀。当系统中上升的热量把流体推向一个转动方向时轨道处于右翼上；当滚动停止而后反向时，轨道就摆动到另一翼上。

这个吸引子是稳定、低维和非周期的。它永远不能和自己相交，因为一旦自交就回到了过去到过的一点，此后的运动就会按周期环重复。永不自交，正是这个吸引子的美妙之处。这些环和螺线有无穷深度，永不真正靠近，永不相交。然而它们始终停留在可用一个盒子隔出的有限空间中。这怎么可能呢？无穷多的路线怎么能处于有限空间中呢？

在曼德勃罗的分形图象充斥科学市场之前，如何构造这种形状的细节是难以想象的，洛伦兹在他的尝试性描述中承认了这种“明显矛盾”。他写道：“两个各自包含一条螺线的曲面相会合，而两条轨道不能相会合，这是很难调和的。”同时他也看到，自己计算机能力所及的少量计算很难给出这个

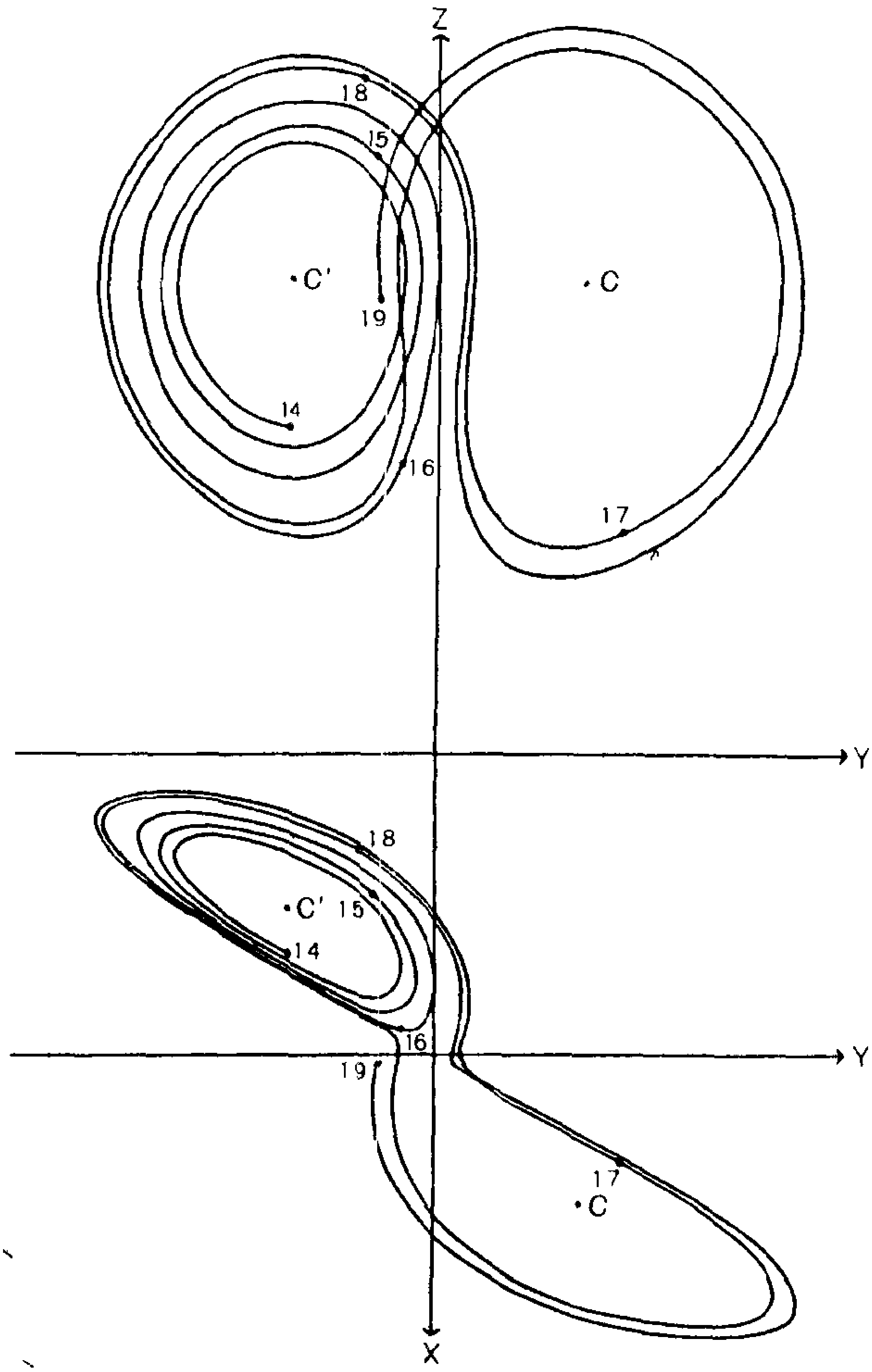


图 6 4 第一个奇怪吸引子

1963 年洛伦兹用自己的简单方程组只能算出吸引子的最初几根线条。但他已经看出，互相夹起来的两个螺线翼在看不见的小尺度上必然具有一种异乎寻常的结构。

微妙答案。他意识到，在螺线看来要并起来的地方，那曲面必定要分开，形成像千层饼中那样隔开的层次。"我们看到，每一个曲面实际上是一对曲面，于是当它们看来要会合时，那里实际上有四层曲面。把这个过程继续一轮，我们看到那里实际有八层曲面，等等。于是我们最终得出结论说这是一种无穷复杂的曲面，每一层都极其靠近两个趋向会合的曲面之一。"毫不奇怪，1963 年气象学家们只好把这种思索放下，而 10 年后，当茹厄勒最终得知洛伦兹的工作时感到惊讶和激动也是颇为自然的。在以后的年代中，他去拜访了洛伦兹一次，但离开时却因为没有足够多地讨论共同的科学领域而稍感失望。以自己特有的羞怯，洛伦兹把这次见面变成了社会交往，两人一齐陪夫人去参观了一所艺术馆。

人们兵分两路地去探求茹厄勒和塔肯斯提出的线索。一方面是使奇怪吸引子形象化的理论努力。洛伦兹吸引子典型吗？还可能有哪些其他形状？另一条道路是从实验上确认或者否定这种高度非数学性的信念飞跃，即奇怪吸引子可以适用于自然中的混沌。

在日本，上田在研究模拟弹簧行为（但快得多）的电路时，发现了美丽非凡的一组奇怪吸引子。（他也遇到了茹厄勒见过的冷漠，不过是东方式的："你的结果并不超乎概周期振荡。请不必提出孤芳自赏的定态概念。"）在德国，一位不看病的医生若斯勒通过化学和理论生物学走到混沌，开始独特地把奇怪吸引子当作哲学对象，而让数学跟随在后面。若斯勒的名字与一种特别简单的吸引子相联系，它的形状是带有一次折叠的橡皮圈，它被研究得很多，因为很容易画出来。但是他也设想过高维的吸引子。他会形容说，"一根香肠套香肠

套香肠套香肠，把套在里面的香肠取出来经过折叠和挤压再放回去。”果然，空间的折叠和挤压是构造奇怪吸引子的关键，很可能也是理解那些导致吸引子的实际系统的动力学的关键。若斯勒感到这些形状体现了世界上一种自组织原理。他设想飞机场上风向袋似的东西，说，“一条开口的长袜子，底上开了个孔。风吹进来，被陷在里面。违背它的意愿，能量还是在作功，就像中世纪历史上的魔鬼一样。这原理就是：自然界违背自己意愿而做事，并由于自我纠缠而形成美。”

画奇怪吸引子的图不是件平常易事。典型情况是，三维或更多维的轨道转出越来越复杂的路径，在空间涂出一团黑；它具有内部结构，但是从外面又看不见。为了把这些三维线团转换成平面图形，科学家们起先使用了投影技术，画出吸引子投射在某个曲面上的影子。然而对于复杂的奇怪吸引子，投影会把细节抹成无法破译的一团糟。更有启示性的技术是绘制回复映象或庞加莱映象，实质上就是从纠缠交错的吸引子中心取出一片，切出一个二维的断面来，就像病理学家为显微镜准备的组织切片一样。

庞加莱映象从吸引子中减去一维，把连续线变成点的集合。当把一个吸引子约化成它的庞加莱映象时，科学家暗中假定这样仍可保持运动的多数本质特点。例如，他可以设想一个奇怪吸引子在眼前飞舞，轨道忽上忽下、忽左忽右、来来往往地通过他的计算机屏幕。每次轨道穿过屏幕时，在相交处留下一个亮点，这些亮点或者形成随机的污迹，或者开始勾画一定的发着磷光的形状。

这个过程对应着对于系统的状态进行经常但不连续的采样。何时采样，即从奇怪吸引子的哪一部分切出一片，这个

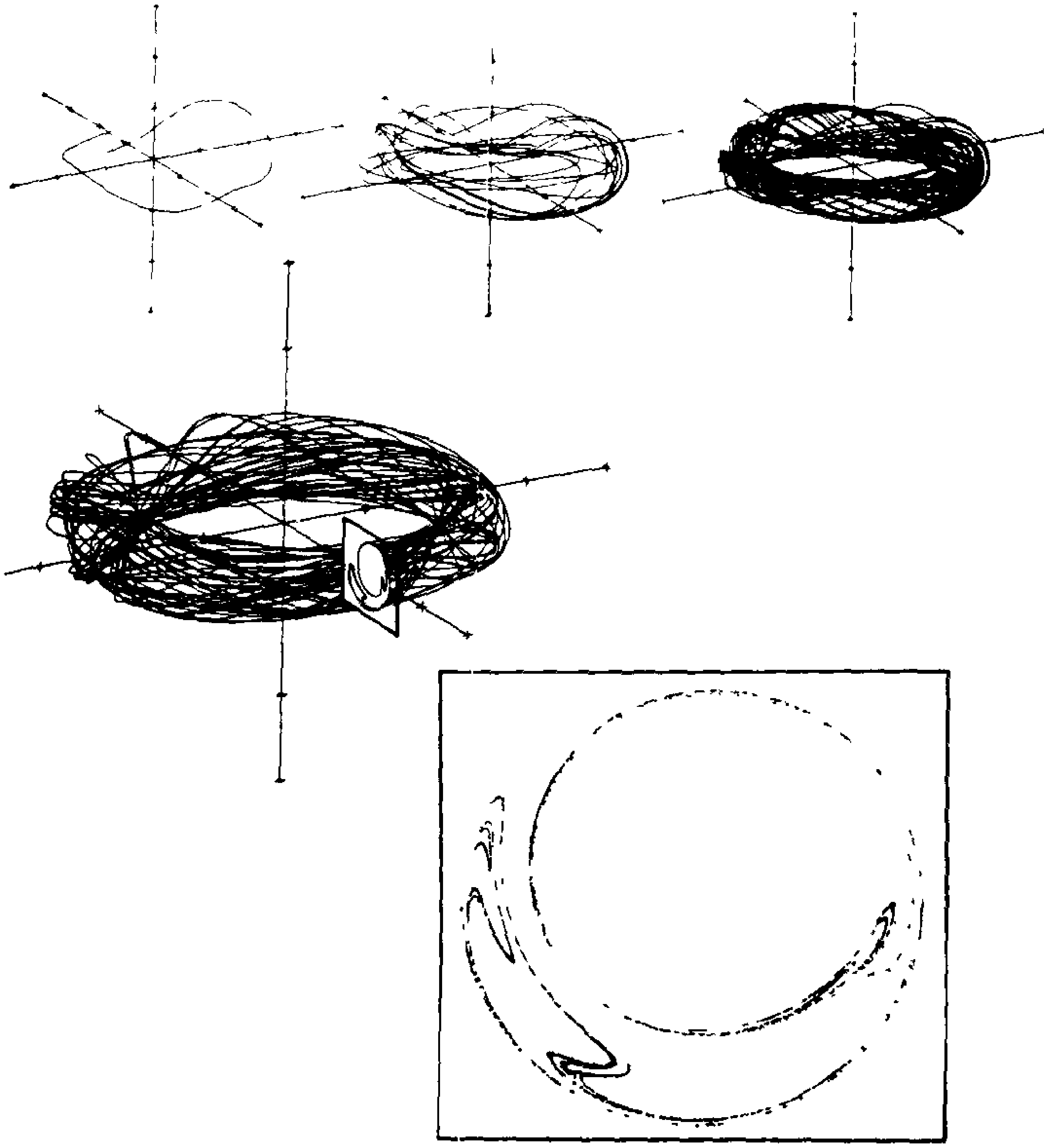


图6 5　揭示吸引子的结构

上图的奇怪吸引子——先是1圈，然后是10圈、100圈——画出了一个转子的混沌行为。这是一个沿着圆圈摆动的摆，按规则时间间隔被有力地推动。当画了1,000圈时（下图），吸引子已经成为纠缠得难解难分的一团。

为了看出内部的结构，计算机可以截出吸引子的一片，即所谓庞加莱截面。这一技术把三维图形简化成二维。每次轨道穿过特定平面时，它记下一个点，逐渐出现一个细节详尽的图形。在这个例子中有

8,000 多个点，每个点都在奇怪吸引子周围转一整圈。事实上，对系统实行了按规则间隔“采样”。一种信息丢失了，而突出了另一种信息。

问题给予研究者一些灵活性。最富信息的采样间隔，通常对应着动力系统的某个物理特性：例如，摆的庞加莱映象可由每次摆锤经过最低点时采出的速度值组成。研究者还可以设想一个间隔有规则的闪烁光源，把闪光时的相继状态冻结起来。不论用哪种方法，最后都会展示出洛伦兹所猜测的精细的分形结构。

一位天文学家的映象

最简单、因而也最富启发性的奇怪吸引子，来自一个与湍流和流体动力学的奥秘距离甚远的人物。他是法国南海岸尼斯天文台的一位天文学家埃侬。当然，天文学曾经在一个方面肇始了动力系统的研究，行星的钟表式运动给牛顿带来了胜利，也曾给拉普拉斯以灵感。然而，天体力学与多数地球上的系统有一点实质差别。由于摩擦而损失能量的系统是耗散系统。天文系统不是耗散的而是保守的，或者叫哈密尔顿系统①。实际上，在极其细微的尺度上，天文系统也受到拖累：星星因辐射而失去能量，潮汐摩擦从沿轨道旋转的物体上取走动能，然而对于一切实际目的，天文学家在计算中可以忽略耗散。可是，没有耗散之后，相空间就不会折叠和收缩得产生无穷的分形层次。永远不会出现奇怪吸引子。那

---

① 保守系统不必是哈密尔顿系统。——校者

末，会出现混沌吗？

许多天文学家不理睬动力系统长期以来也工作得很愉快，但埃侬有所不同。他 1931 年生在巴黎，比洛伦兹年轻几岁，同样是一位对于数学有着未了缘的科学家。埃侬喜欢可以与物理背景联系起来的具体小问题——“不像今天数学家们所干的事，”他会如是说。当计算机尺寸变到可为爱好者所享有时，埃侬就搞了一台。这是希思基特牌的成套元件，他自己焊好在家里玩。然而，在此之前很久，他已经着手研究一个动力学中莫名其妙的特殊问题。它涉及球状星团——拥挤的成百万星星聚于一处而形成的球体，这是夜空中最古老的也可能是最激动人心的对象。球状星团中的星体密度出奇地高。它们怎样才能聚到一起，怎样随时间演化，这一直是使 20 世纪的天文学家们伤脑筋的问题。

从动力学看，球状星团是一个大的多体问题。二体问题是容易的。牛顿就完全解决了。每一个物体，例如地球和月亮，沿完美的椭圆绕系统的共同重心而运行。可是，只要再加上一个有引力的对象，一切就完全改观。三体问题是困难的，甚至比困难还要糟。庞加莱发现，它常常是不可能处理的。可以数值地计算一小段时间的轨道，借助强大的计算机还可以在不确定性开始显现之前跟踪稍长一点时间。但是方程不能解析地求解。这就是说关于三体系统长时间行为的问题是无法回答的。太阳系稳定吗？短时间里，它显然如此，但直到今天也没有人确切地知道某些行星轨道会不会变得越来越偏心而使行星终于永远飞离太阳系。

像球状星团这样的系统过分复杂，不能直接作为多体问题处理，但是它的动力学可以借助于某种妥协来加以研究。例

如，可以合理地设想单个星体在具有特定引力中心的平均引力场中运动。即使如此，常常两个星会靠得很近，以致它们的相互作用必须单独处理。而且天文学家们认识到球状星团一般不一定稳定。星团内倾向于形成双星系统，即两个星具有紧靠的小轨道，当第三个星遇到双星时，三个星中的一个会受到强烈反冲。时常有一个星从这种相互作用获得足够的能量而达到逃逸速度，于是永远离开星团；剩下的星团因此稍有收缩。1960 年埃侬在巴黎就这个题目写博士论文时，他作了一个相当任意的假定：当星团改变尺寸时，它仍然保持自相似。完成计算之后，他得出一个令人惊奇的结果。星团的核心将获得动能而趋向无穷大密度的状态，以至于塌缩。这是难以想象的，而且迄今观察到的星团也不能证实这个结论。然而，埃侬的理论还是慢慢地得到支持，并被称为“引力热塌缩”。

就这样，乐于用数学去尝试古老问题，乐于从看来不近情理的推论中探索出乎意料的结果，埃侬信心倍增，着手处理星体动力学中一个简单得多的问题。这是 1962 年，他正在访问普林斯顿大学，他第一次有机会接触计算机，正像麻省理工学院的洛伦兹开始把计算机用于气象一样。埃侬开始模拟星体环绕银河系中心的运动轨道。在有一定合理性的简单模型里，银河系轨道可以像绕太阳的行星轨道那样处理，然而有一个例外：中心引力源不是一个点，而是一个有厚度的三维的盘。

对微分方程组作了些简化。他说：“为了多一些实验自由度，我们暂时忘掉问题的天文学来源。”虽然他当时并未明说，“实验自由度”的部分涵义是在一台原始的计算机上自由处理

问题。他的计算机的存储，不及25年后个人计算机单个芯片的千分之一，它同时又是很慢的。然而，同后来混沌现象的实验家一样，埃侬发现过度简化还是获得了报偿。他从自己的系统中抽象出实质性的东西，发现了一些同样适用于其他更重要的系统的结论。许多年之后，银河系轨道仍然是理论游戏的内容，但那些对高能加速器中粒子轨道感兴趣的人们，还有那些关心利用磁等离子体约束以实现核聚变的人们，对这类系统的动力学开展着紧张而费钱的研究。

时间尺度约为两亿年的星系中的星体轨道，具有三维性质而不是完美的椭圆。实际的三维轨道，同相空间里想象的结构一样难以形象化。因此，埃侬采用了一种可与造庞加莱映象相比拟的技术。他设想在银河一端直立起一个平面，使每条轨道都要穿过它，就像跑道上的马闯过终点线一样。然后他记下轨道穿过这平面处的点，并跟踪这个点从一个轨道到一个轨道的运动。

埃侬曾不得不用手打点，但后来许多使用这一技术的科学家是在计算机屏幕上观察点的出现，就像夜幕降临时远处路灯一盏一盏地点亮。一条典型轨道可能从坐标纸的左下角开始。然后到下一轮，在右面若干英寸处出现一个点。然后是另一个点，更往右上方一些——如此继续下去。最初看不出明显的形状，然而一二十个点之后，一条卵形线就可能形成。后继的点实际上是沿着曲线转，但由于它们并不准确地回到原处，于是在成百上千点之后，曲线最终勾画成实线。

这样的轨道不完全规则，因为它们永不重复，但它们确实是可以预言的，因而远非混沌。没有一个点落在曲线内部或外面。翻译成原来的完全三维的图形，这些轨道勾画出一

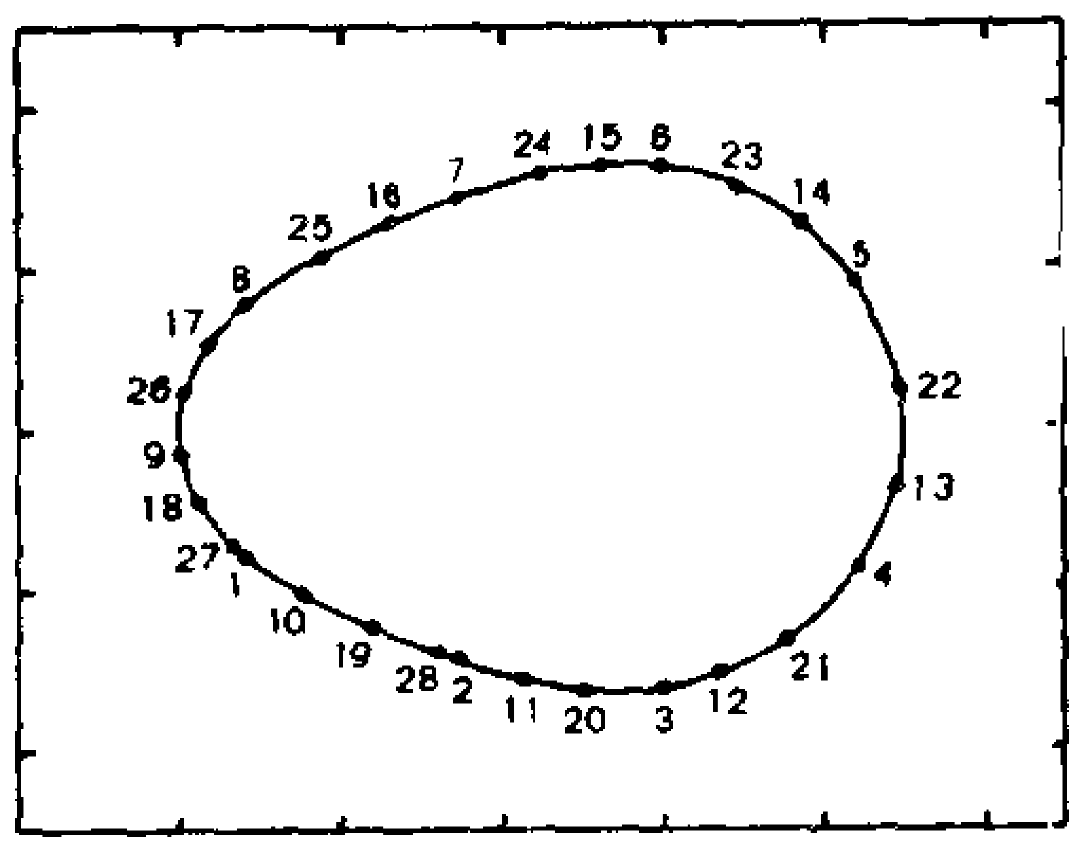
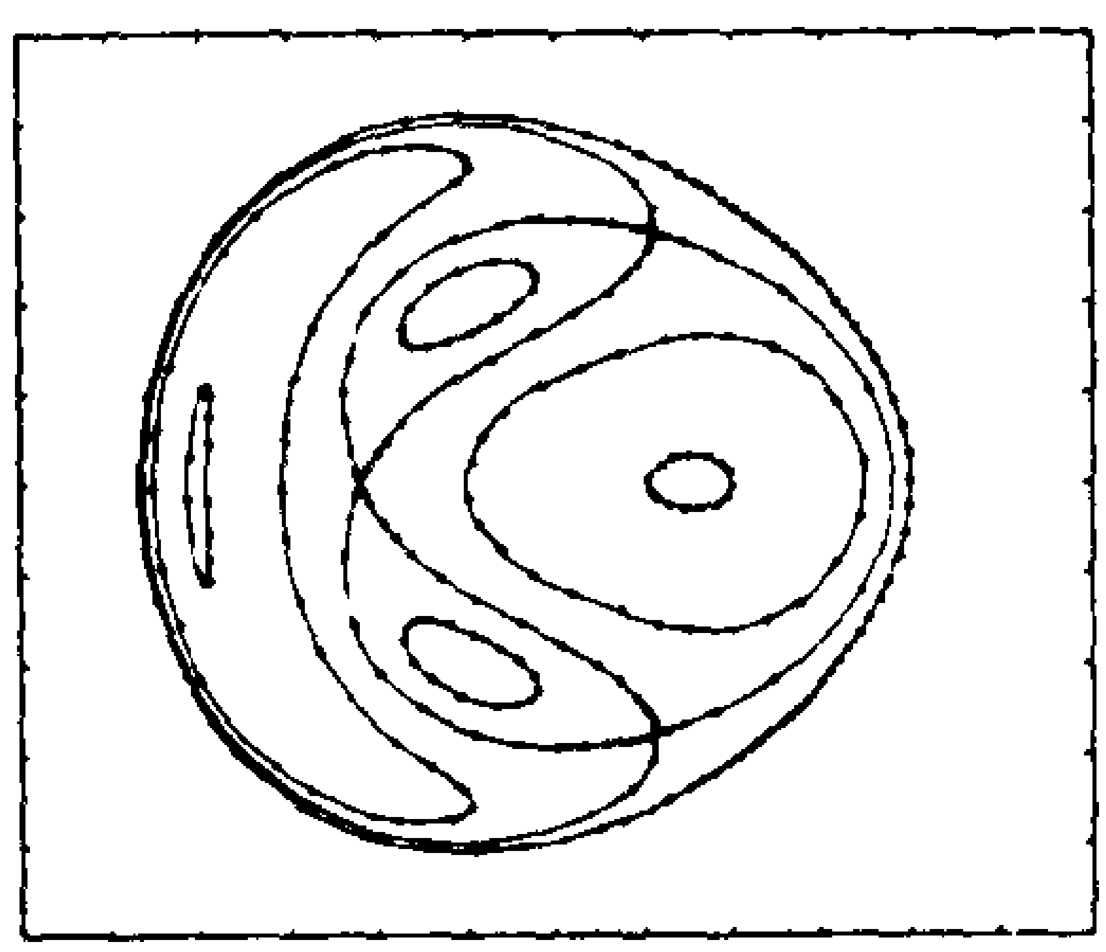
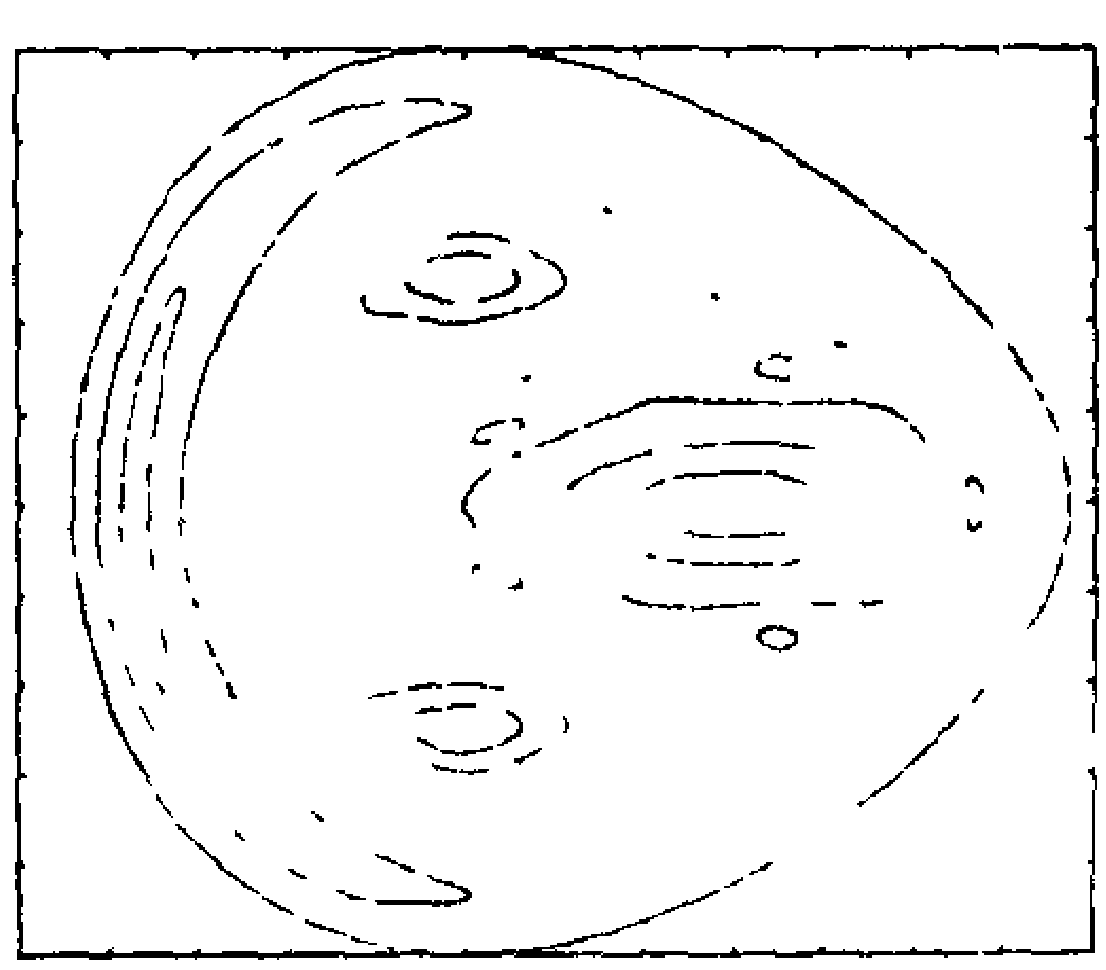
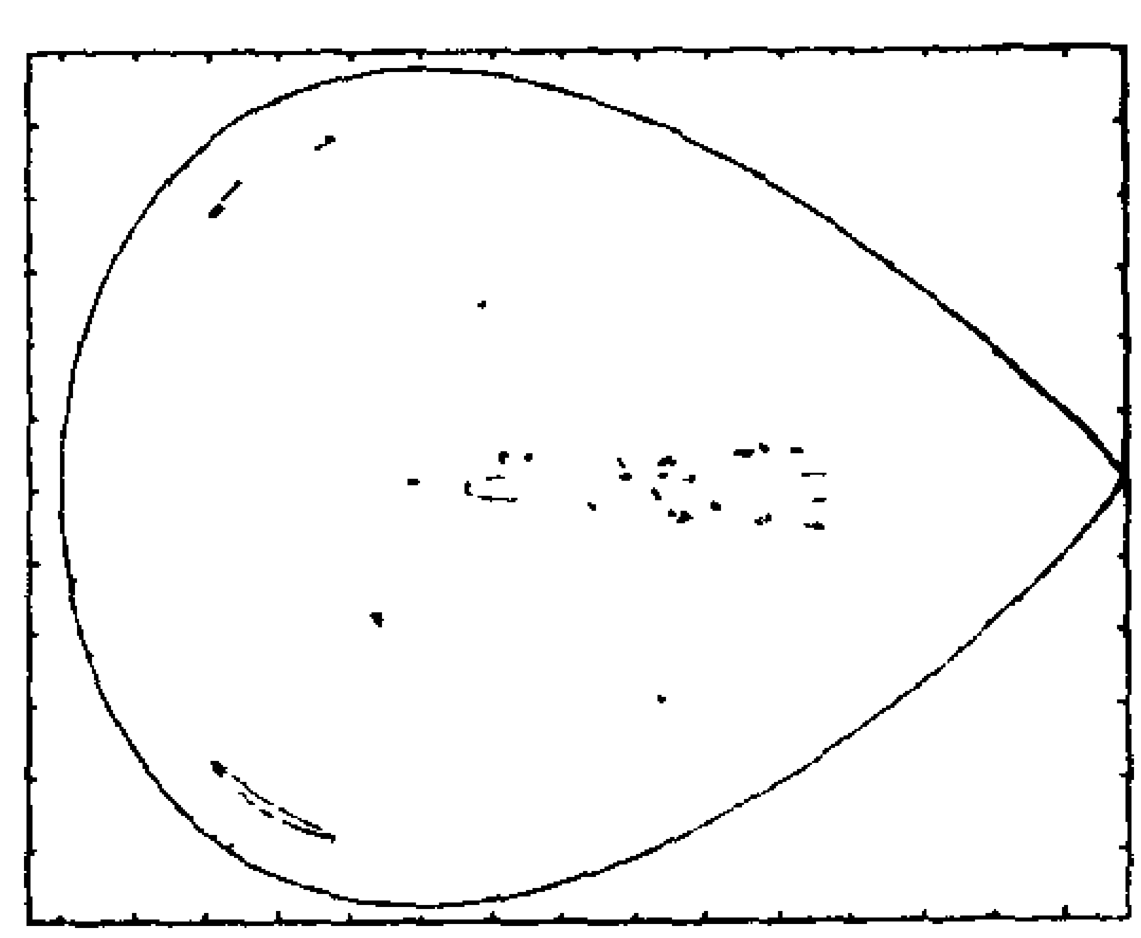


图6 6　围绕星系中心的轨道

为了理解穿过星系的星体轨道，埃侬计算了轨道与一个平面的交点。所得图形与系统的总能量有关。从稳定轨道得到的点渐渐地产生出一条连续的连通曲线（左图）。然而，其他能级都产生出稳定性和混沌的复杂的混合物，其中混沌由分散点的区域代表。







个环面，一种面包圈似的形状，埃侬的映象正是环面的一个截面。到此为止，他只是演示了前人认为当然的情况。轨道是周期的。从 1910 年到 1930 年，在哥本哈根天文台，一整代天文学家辛苦地观测和计算了几百条这样的轨道，但他们仅仅关心其中可以证实为周期轨道的那些。埃侬说，“那时候我和其他人一样确信，所有的轨道都应当像这一条一样的规则。”但是，他同自己在普林斯顿的研究生海尔斯一起，继续计算其他的不同轨道，一面不断提高这个抽象系统的能级。不久，他们看到了绝对新鲜的事物。

先是卵形线扭曲成更复杂的形状，自己交叉成 8 字形，然后分裂成隔开的环。每条轨道仍然落到某个环上。接着在更高的能级，非常突然地又出现另一个变化。埃侬和海尔斯写道：“这里出现了奇迹。”某些轨道变得很不稳定，点开始随机地散落到整页图纸上。在有些部位，还可以画出曲线；在另一些地方，不能用任何曲线把点联起来。整个图形变得颇为戏剧性：完全无序的明证和有序的明显残余混合在一起，形成这些天文学家称为“岛屿”和“岛链”的形状。他们试了两台不同的计算机和两种不同的积分方法，结果还是同样的。他们只能探索和思考。完全基于数值实验，他们提出关于这类图形的深层结构的猜想。他们提出，只要有更高的放大倍数，在越来越小的尺度上会出现更多岛屿，可能一直这样无穷继续下去。需要有数学证明——“然而，这一问题的数学处理看来并非易事。”

埃侬继续研究其他问题，但 14 年后，当他终于听到茹厄勒和洛伦兹的奇怪吸引子时，他是有准备地去听的。1976 年他已经调到高耸在地中海边大峭壁上的尼斯天文台。他听了

一位来访的物理学家讲洛伦兹吸引子。这位物理学家一直在试用各种方法阐明吸引子的精细的“微观结构”，但收效不大。虽然耗散系统不是自己的领域（“有时候天文学家们害怕耗散系统，它们太拖泥带水”），埃侬还是觉得自己有点想法。

他再次决定抛开系统的全部物理渊源，只集中到他想探究的几何实质上。洛伦兹和其他一些人坚持用微分方程——在空间和时间都连续变化的流，而埃侬则转向在时间上离散的差分方程。他确信，关键是相空间重复地拉伸和折叠，就像糕饼师傅把面团擀开，叠起来，再擀开叠起，最终形成一束薄层的结构。埃侬在一张纸上画了一个卵形。为了拉伸它，他使用一个简短的数函项，把卵形上的任一点移动成为中间向上拉起的一个拱形上的一个新点。这是从一点到一点的映射，使整个卵形被“映射”到拱形。然后他选择第二次映射，这回是压缩，使拱形往内收缩得更窄。然后第三次映射把窄拱形转一个直角，使它与原来的卵形排齐。这三次映射可以合并成一个函数来计算。

从精神实质讲，他是在遵循斯梅尔的马蹄思想。数值上整个过程非常简单，用一只计算器就可以处理。任何一点由一个 x 坐标和一个 y 坐标来确定水平和垂直位置。求新 x 的规则是：取老 y 加上 1，然后减去 1 4 乘以老 x 的平方。求新 y 时，只要把老 x 乘以 0.3。这就是说：$x_{新}=y+1-1\ 4x^2$，$y_{新}=0.3x$。埃侬或多或少随机地取了一个起始点，拿起计算器，画下一个点，然后一点接一点地画了几千个新的点。接着他用真正的 IBM7040 计算机快速地画出 500 万个点。任何备有带图形显示的个人计算机的人都可以容易地做这件事。

最初这些点看来随机地在屏幕上跳来跳去。结果就像是

一个三维吸引子的庞加莱截面，杂乱地前后穿过屏幕织出点集。但是，很快开始出现一种形状，弯曲的轮廓像一只香蕉。程序运行越久，细节出现越多。轮廓的一部分看来具有某种厚度，但随后这厚度分解成两条不同的线，然后两条线分成四条，其中一对靠得很近，另一对离得较远。再放大后，四条线中的每一条原来都由双线组成——如此这般，直至无穷。同洛伦兹吸引子一样，埃侬吸引子也显示出无穷次回归，就像大人套小人的俄国玩偶，形成永不结束的长长序列。

这种线内有线的嵌套细节，可在一组不断放大的图中清楚看到。但是奇怪吸引子的诗异效果还可以用另一种办法来欣赏，那就是一点一点地让图形随时间发展。就像魔鬼从雾中出现。新的点随机地散落在屏幕上，以致看来存在着任何结构是不可思议的，更不用说那样复杂和细致的结构。任何两个相继的点可以分开得任意远，就像湍流中最初曾相邻的任何两点一样。给定任何数目的点，也不可能猜出下一个点会落到哪里——当然，它会落在吸引子的某一部分。

这些点非常随机地漫游，整个图象的出现又是非常微妙，以致很难想起这形状是一个吸引子。这决不只是动力系统的任何一条轨道，而是所有其他轨道收敛所向的那一条轨道。因此初始条件的选择才没有关系。只要起始点位于吸引子附近，随后几个点将以极快速度趋向吸引子。

“焰火或星系”

许久以前，当茹厄勒 1974 年来到纽约市立大学里郭勒卜和斯文尼的实验室时，这三位物理学家面对的是理论与

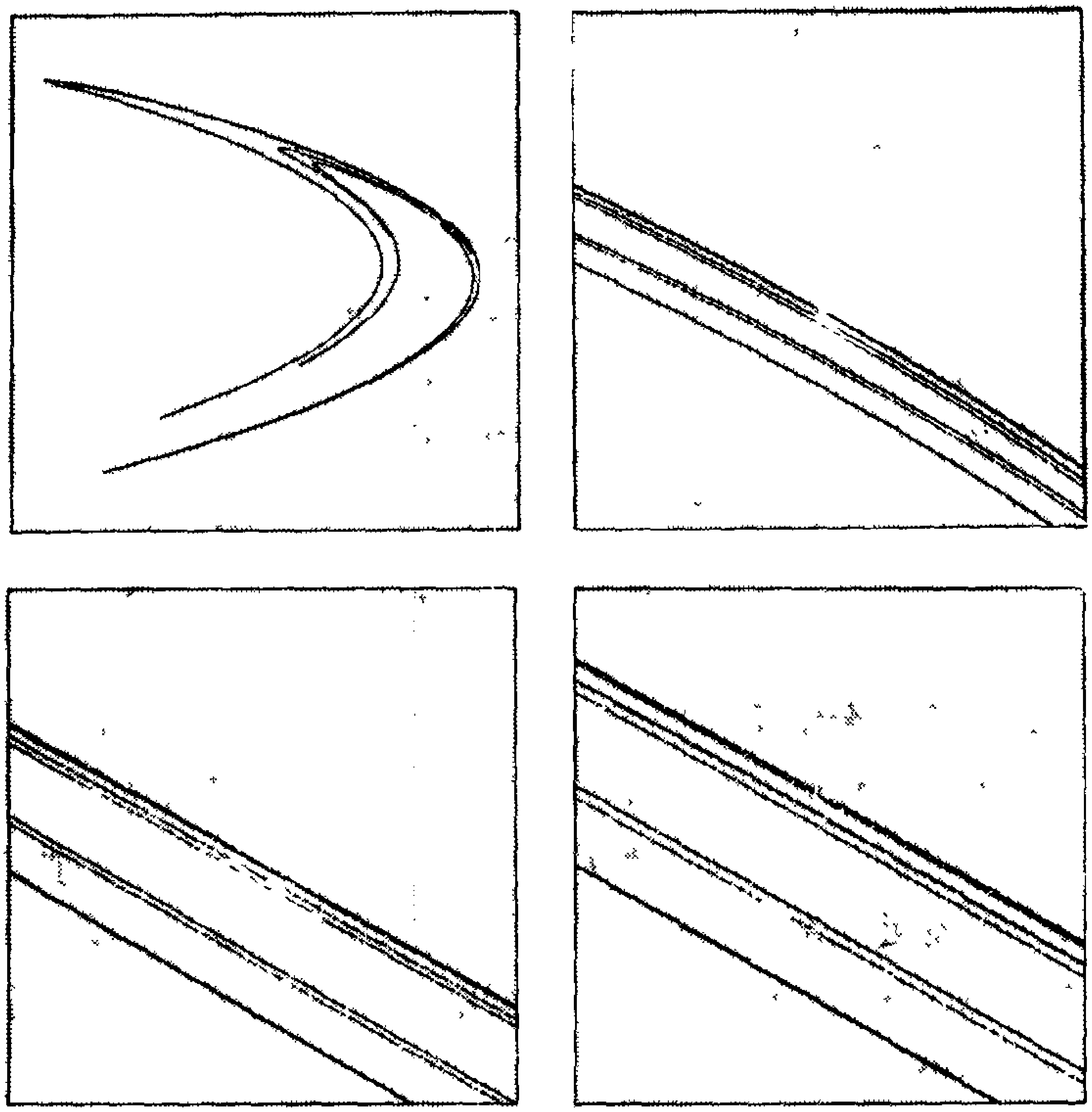


图 6 7　埃侬吸引子

折叠和拉伸的简单结合产生一个很容易计算的吸引子，但它仍未被数学家们很好地理解。随着几千个点、几百万个点的出现，显现出越来越多的细节。看来像是一条条单线，放大后成为成对的线条，而且对中有对。然而，无法预言任何相继两点将靠近还是远离。

实验间颇为渺茫的联系。一纸数学，哲学上很勇敢而技术上不明确。一简湍急的流体，没有多少好看，但清楚地与老理

论不和谐。三个人谈论了一下午，然后斯文尼和郭勒卜带着妻子到阿迪朗达克山中郭勒卜的小屋去度假。他们还没有见过一个奇怪吸引子，他们也还很少测量过湍流开始处实际可能发生的情况。但他们知道朗道不对，而茹厄勒或许是对的。

作为计算机探索所揭示的世界的一种元素，奇怪吸引子开始时仅仅是一种可能性，它标志出20世纪里许多伟大设想都未能达到的地方。不久，当科学家们看到了计算机所显示的图象，他们觉得这是一张见过的面孔，不论在湍急水流的音乐声中，还是在像面纱般地撒遍天空的云朵里，处处都有。大自然是受到限制的。看来，无序也被引导到具有某种共同背景的模式中。

后来，奇怪吸引子受到承认，给了数值开拓者们清楚的行动纲领，促进了混沌研究中的革命。他们在自然界看来具有随机性行为的一切领域寻求奇怪吸引子。许多人论证地球天气可能处在奇怪吸引子上。另一些人汇总了数百万股票市场数据，开始在那里搜索奇怪吸引子，办法是通过计算机这个可调整的放大镜来查看随机性。

在70年代中期，这些发现都还是属于未来的事。没有人在实验中真正见过一个奇怪吸引子，也远远不清楚怎样才可以找到它。从理论上讲，奇怪吸引子可能给出混沌的基本新性质的数学实质。对初始条件的敏感依赖性就是其中之一。“混合性”是另一条；它的涵义对于例如关心燃料和氧气有效组合的喷气发动机设计师是清楚的。然而，没有人知道怎样测量这些性质，怎样给它们以数值。奇怪吸引子看来是分形，即应具有分数维数，但没有人知道怎样测量维数，怎样对工程问题应用这种测量。

最重要的是，没有人知道奇怪吸引子是否会对非线性系统中的最深刻问题有所启示。与容易计算、容易分类的线性系统不同，非线性系统看来各有千秋，实质上还不能分类。科学家们可能开始猜测它们具有某些共同性质，然而一旦要进行测量和完成计算，每个非线性系统都自成一体。明白了这一个似乎无助于理解另一个。洛伦兹吸引子演示了一个本来似乎没有模式的系统的稳定性和隐含结构，但这个特殊的双螺线怎样才能有助于研究者们探索其他无关的系统呢？没有人知道。

而现在，激情已经超过纯科学。看见这些形状的科学家会暂时忘记科学论述的规则。例如，茹厄勒就说："我还没有提到奇怪吸引子的美学感染力。这些曲线系统，这些点点云彩，时而像焰火或星系，时而又像奇怪而不平静的植物增殖。一个形象的王国有待探索，一个和谐的天地有待发现。"

7 普适性

这些直线反复交替带来黄金；
给大地镶上这个圆圈
带来急风骤雨和电闪雷鸣。

——引自马洛：《浮士德博士》

洛斯阿拉莫斯的新起点

从瀑布逆流而上几十码处，那平静的溪流似乎已经预知即将到来的陡落。水流开始加速和颤抖。每一股涓涓细流像一条搏动着的静脉。费根鲍姆站在溪边。他身穿运动衫和灯芯绒裤，微微出汗，正吸着一支烟。他一直在和朋友们一起散步，但其他人已经走向上游安静的池塘。突然，就像一位疯狂的网球观众在快速盯球，他开始左右转动头部。“你可以注视着某种东西，一堆泡沫或别的什么。如果头动得足够快，你可以忽然辨认出表面的整个结构，你可以在心里感觉到它。”他又吸了一口烟。‘但是对于任何一位有数学背景的

人，当他看到这东西，或者仰望着累累浮云，或者在风暴中站在海堤上，他知道对于这一切实际上什么也不懂。”

混沌中的有序。这是最古老的科学题材。关于自然界中的隐含统一和共同背景的思想，有其内在的诱惑力。它有过引发伪科学家和狂热者的不幸历史。当1974年费根鲍姆来到洛斯阿拉莫斯实验室时，还差一岁就到而立之年。他知道当今物理学家如果要在这古老的思想上做文章，就必须有一个实际的框架，有一套把思想变成计算的方法。怎样走出第一步是远非显然的。

雇用费根鲍姆的卡拉瑟斯是一位安静的、表面上过分和蔼的物理学家，他1973年从康奈尔大学到这里来接管理论部。他的第一个行动就是解雇了五六位高级科学家——洛斯阿拉莫斯没有大学里那种固定职位，而代之以自己挑选的生气勃勃的年轻研究人员。作为科学管理工作者，他具有雄心壮志，但是他从经验中知道，好的科学工作往往不出自计划。

“如果你在实验室或华盛顿建立一个委员会，并且说，‘湍流挡住了我们的去路，我们必须搞懂它，对它缺乏了解实际上使我们在许多领域里失去了前进的机会，’那末你当然会雇用一批人，搞一台巨型计算机，开始运行大程序。但你会毫无所获。另一种办法是请来这个精明的年轻人，他安静地坐在那里，也和别人谈话，但主要是独自工作。”他们讨论过湍流，但是时间过去了，甚至卡拉瑟斯也不知道费根鲍姆在往何处走。“我想他已经退却并且换了另一个题目。我并不知道这另一个题目还是同一个问题。这看来是使许多不同的科学领域受阻的事，它们受阻于系统中非线性行为的这同一方面。现在谁都想不到这个问题的正确背景是懂得粒子物理，懂一

点量子场论，并知道在量子场论中有这些叫做重正化群的结构。没有人知道必须懂得随机过程的一般理论和分形结构。

“费根鲍姆具有正确的背景。他在正确的时候做正确的事，而且做得很出色。他不是做局部的事情。他把整个问题弄清楚了。”

费根鲍姆带到洛斯阿拉莫斯的一种信念是，物理科学未能理解艰难的非线性问题。虽然他作为物理工作者还几乎没有作出过任何成果，但已经积累了非同寻常的知识背景。他对最富挑战性的数学分析有精明的工作知识，他知道一些科学家挖空心思提出的计算技术。他学会了不完全拒绝那些渊源于18世纪浪漫主义的看来似乎非科学的想法。他想研究一种新科学。作为开始，他丢开了去理解现实复杂性的一切想法，转向他能找到的最简单的非线性方程。

重正化群

宇宙之谜第一次通过一台老式收音机呈现在4岁的费根鲍姆面前，那是战后不久在纽约布鲁克林区他双亲的起居室里。无缘无故出现的音乐使他迷惑。另一方面，他又觉得他懂得留声机。老祖母特许他去拨弄那台可以放78转唱片的话匣子。

他的父亲是一位化学师，先在纽约港务局工作，后来到了一家公司。母亲在市立学校教书。他最初决定要做一名电气工程师，这在布鲁克林是大家知道挣钱不少的职业。后来他才明白他想要知道的有关收音机的事儿更有可能在物理学中弄个明白。他属于纽约市郊区那一代通过著名的公立学校

（他进的是蒂尔登高中）和市立大学走上光辉前程的科学家。

要想在布鲁克林成长为一个精明人物，在一定程度上要学会在介于思维世界和其他人的世界之间的不平坦道路上行进。他在很年轻时是非常合群的，他把这看成是不挨打的办法。但是当他明白自己还可以学习点东西时，他感到了某种刺激。于是他离朋友们越来越远。他对普通谈话不感兴趣。在大学的最后一年，他忽然感到耽误了青春时代，于是设想了一个计划来恢复与人性的接触。他会安静地坐在自助餐馆里，倾听大学生们谈论刮胡子或饮食，渐渐地重新学会了不少与人谈话的技巧。

他1964年毕业后，又进了麻省理工学院，1970年获得基本粒子物理方面的博士学位。然后，他毫无成果地在康奈尔大学和弗吉尼亚工学院度过4年；毫无成果，是指未能连续不断地就可以处理的问题发表文章，这对于大学中年轻的科学工作者是至关重要的。博士后本来应该写论文。偶然一位导师会问费根鲍姆某个问题的情形如何，而他会说："噢，我知道这个。"

新近在洛斯阿拉莫斯就职的卡拉瑟斯，是一位凭他的资格令人生畏的科学家，他因自己物色能人的本事而骄傲。他寻求的不是聪明，而是一种似乎像是从某个魔术腺体中流出来的创造力。他经常记起威尔逊，这是另一位说话柔和的康奈尔物理学家，看来像是什么也做不出来。但任何与威尔逊长谈过的人，都意识到他具有洞察物理的深刻能力。因此威尔逊的固定职位成了严肃争论的问题。那些愿意为他的未被证明过的潜力打赌的物理学家胜利了——这就像大坝决口一样。从威尔逊的抽屉里出来的论文不是一篇，而是像潮水般

的一大批，其中包括使他获得1982年诺贝尔奖的工作。

威尔逊和另外两位物理学家卡丹诺夫和费希尔对物理学作出的伟大贡献，是混沌理论的重要始祖。这几位独立工作的人，都以不同的方式在思考相变问题。他们在研究物质从一种状态到另一种状态的转变点附近的行为，例如从液态到气态，或从非磁化到磁化状态。作为两种存在区域之间的奇异边界，相变问题的数学是高度非线性的。物质在任何一个相中的平滑而可预言的行为，对于理解相变帮助甚少。炉子上的一壶水在达到沸点之前一直是按正常方式加热。然后温度停止上升，同时在液体和气体的分子界面上发生某种十分有趣的情况。

按照卡丹诺夫在60年代的观点，相变提出一个智力难题。设想一块金属被磁化。当它进入有序状态时，它必须作一个决定。磁性可指向两个方向中的任一个。它有选择自由。但每一小块金属都必须作出同一选择。这是为什么？

在作选择的过程中，金属中的原子必须以某种方式互通信息。卡丹诺夫的洞察在于，这种通信可以最简单地用尺度变换描述。事实上，他设想把金属分成小块。每块金属和自己的最近邻通信。描述这种通信的方式与描述任何原子和近邻通信的方式一样。这就是尺度变换的好处：最好的设想金属的办法，就是把它变成类似分形的模型，由各种尺度的小块组成。

为了确认尺度思想的威力，需要作很多数学分析和取得对实际系统的很多经验。卡丹诺夫感到他已着手于一项繁重的事业，并且创造了一个极为美妙和自足的世界。部分妙处在于它的普适性。卡丹诺夫的想法支持了临界现象中最引人

注目的事实，即这些看来相互无关的转变——液体沸腾，金属磁化——全遵从同样的规律。

然后，威尔逊在重正化群理论的标题之下集其大成，并且提供了对现实系统进行实际计算的有力途径。重正化在40年代作为量子论的一部分进入了物理学，使电子和光子的相互作用的计算成为可能。这类计算，以及卡丹诺夫和威尔逊所关心的计算，要对付一个问题，即某些项似乎要作为无穷大量来处理，这是很糟糕而令人头痛的事。按照费曼、施温格、戴森以及其他一些物理学家提出的办法对系统重正化，就可以消除无穷大。

直到很久以后，即60年代，威尔逊才发掘出重正化方法成功的基础。同卡丹诺夫一样，他想到的也是尺度变换原理。有些量，像粒子的质量，一向被认为是固定的，就像日常经验中任何物体具有固定质量一样。重正化的捷径之所以成功，是由于把像质量这样的量当作似乎根本不固定。这些量似乎随着观察尺度而上下浮动。这看来没有道理。不过这确是曼德勃罗关于几何形状和英国海岸线的看法的准确类比。后者的长度不能与尺度无关地测出。有一种相对性，使观测者位置的或近或远，或在海滩上或在卫星上，对测量有影响。就像曼德勃罗也曾看到的，跨越尺度的变化并非任意的，而是遵从着一定的规律。质量或长度的标准测量结果的可变性，意味着另一种不同的量要保持不变。对于分形，这就是分维——这是一个常数，它可以计算，并且可以用作继续计算的工具。允许质量随尺度变化，意味着数学家可以识别出跨越尺度的相似性。

于是威尔逊的重正化群理论提供了处理这些无穷密集问

题的不同道路和进行艰难计算的方法。在此之前，处理高度非线性问题的唯一手段是微扰论。为了计算的目的，先假定非线性问题距某种可解的线性问题很近，只差一个小小的扰动。解出线性问题，然后对剩下的部分实行一套复杂的手续，把它展开成所谓费曼图。所要求的精度越高，必须作出的这种折磨人的图就越多。如果运气好，计算结果收敛到一个解。然而，对于特别有趣的问题，好运会消失。费根鲍姆同60年代的其他年轻粒子物理学家一样，计算过无穷无尽的费曼图。他认定微扰论是使人厌烦、不能说明问题和笨拙的。因此他爱上了威尔逊的新的重正化群理论。借助自相似性，它给出拆掉复杂性的方法，每次消去一层。

可是在实践中，重正化群远非笨人也能干的简单事。要有相当的独创性来选取可以抓住自相似性的正确计算。然而，它的效果很好．往往足以诱使某些物理学家，包括费根鲍姆在内，尝试用它来处理湍流问题。无论怎么说，自相似性看来是湍流的一种特征：涨落上有涨落，旋涡中有旋涡。然而湍流的发生，那有序系统转为混沌的神秘瞬间，又如何呢。没有根据可以认为重正化群对处理这种转变有用。例如，没有根据可以认为这一转变遵从尺度变换的规律。

颜色的破译

费根鲍姆是麻省理工学院的研究生时，有过一次多年难忘的体验。他当时同朋友们一起在波士顿的林肯水库周围散步。他养成了一种习惯：步行四五个小时，全神贯注于在脑海中流过的印象和思想。这天他离开人群独自行走。他在

一些野餐者旁边经过，越走越远，时而回首一顾，听一听他们的说话声，看一看那些示意或取食的手势。突然，他觉得整个画面越过了一个限度，成为不可理解的了。身影小得不好分辨。动作显得不连贯、任意和随机。他听到的微弱语音已经失去涵义。

“这永不停息的运动和难以理解的生活喧闹，”费根鲍姆回想起马勒的话，那是在描写他在《第二交响曲》第三乐章里试图捕捉的感觉。“就像灯火辉煌的舞厅里的婆娑身影，而你正向外面黑夜里听不见音乐的远方观望……。生活在你看来可能毫无意义。”费根鲍姆在倾听马勒和默诵歌德，使自己沉湎于他们高度的浪漫姿态之中。他必然地最喜欢歌德的《浮士德》，吸收其中关于世界的最激动和最理智思想的结合。如果没有一些浪漫倾向，他肯定会忽略掉像这次水库边上的迷惘感受。归根到底，为什么一些现象在从更远距离望去时不应失去意义呢？物理学定律对这些现象为何缩小提供了简单化的解释。再想一下就会发觉，缩小和失去意义两者之间的联系并不显然。为什么事物在变小时也应当变得难以理解呢？

他很认真地试图用理论物理的工具来分析这次体验，思考自己对于大脑的感觉机制能发表什么看法。你看见人们交往，然后推演关于他们的结论。给定你的感官所能得到的巨量信息，你的译码系统是怎样进行整理的？清楚或几乎清楚的是，大脑并没有一份外在事物的直接复制品。也没有形象和思想的库，可用来比较感觉图象。信息是以富有弹性的方式存储的，因而允许有异想天开的对比和飞跃的想象。外面存在着某种混沌，在找出其中的有序方面，大脑看来比经典

物理学更灵活。

同时，费根鲍姆在思考颜色。19世纪初一场小小的科学争论，涉及到英国的牛顿追随者们和德国的歌德关于颜色本质的不同意见。对于牛顿物理学来说，歌德的想法恰恰全是伪科学的闲谈。歌德拒绝把颜色看成静态的量，可以用分光计测量出来，并像蝴蝶钉到纸板上一样地固定下来。他争辩说颜色是感觉问题。他写道："随着光线的平衡或抵消，大自然在她事先确定的限度内振荡，这样就产生了我们在时空中感受到的现象的全部变化与条件。"

牛顿理论的试金石是他那著名的棱镜实验。棱镜把白色光线分解成跨越整个可见谱的彩虹，而牛顿意识到这些纯色必定是加起来可以产生白色的基本成分。然后是一个认识上的飞跃，他提出颜色与频率对应。他设想某些振动体——微粒是过时的说法——必然产生比例于振动速度的颜色。考虑到支持这种观念的证据如此之少，它真是既不合理又极其光辉的思想。什么是红色？对于物理学家，这是在620到800微米波长之间的光辐射。牛顿的光学成千次地得到了证明，而歌德关于颜色的著作已经湮没无闻。当费根鲍姆去找这著作时，他发现哈佛大学图书馆里的一本早已经注销了。

他最终还是找到了一本，并且发现歌德在研究颜色时，事实上曾经做过一组非同寻常的实验。他和牛顿一样，从一只棱镜开始。牛顿把棱镜置于光线前面，使分解开的光束投射到白色表面上。歌德把棱镜放到自己眼前，从里面看过去。他根本感觉不到颜色，既无彩虹，也没有单色。无论是看干净的白色表面还是看蓝色晴空，通过棱镜产生同样效果：一片均匀。

但是，如果白色表面上有一个小斑点或者天空中有一片浮云，他就会看到颜色绽开。歌德得出结论说，导致颜色的是“光和影的互换”。他进而研究人们看到不同颜色光源所投射的影子的方式。在一连串详尽的实验中，他使用了蜡烛和铅笔，镜子和有色玻璃，月光和日光，晶体，液体和色轮。例如，他在曙光和暮色中在一张白纸前点燃蜡烛，举起铅笔。烛光中的影子呈现鲜蓝色。为什么？单独的一张白纸，无论是在下落的日光中，还是加上温暖的烛光，都被看成白色。影子怎么把白色分成了蓝色的和黄里带红的区域？歌德争辩说，颜色是“暗度，和影结合在一起”。首要的是，用更为现代的语言说起来，颜色来自边界条件和奇异性。

牛顿作为简化主义者之处，正是歌德的整体主义所在。牛顿把光线分开并且找到了颜色的最基本的物理解释。歌德在花园中散步，并研究绘画，以寻求宏大的包罗万象的解释。牛顿使他的颜色理论适合于可供整个物理学用的数学模式。歌德幸运地或不幸地厌恶数学。

费根鲍姆说服自己，歌德关于颜色的看法是正确的。歌德的思想使人想起在心理学家中流行的一个简易的观念，即要区分确实的物理现实和对它的可变的主观感觉。我们看到的颜色随时而变，因人而异——这点是容易说的。然而就费根鲍姆的理解而言，歌德的思想包含了更多的真正科学。它们是确实而具有经验性的。歌德一再强调他的实验的可重复性。歌德认为，正是对颜色的感觉，具有普适性和客观性。有什么科学根据可以脱离我们的感觉来定义红色的现实世界性质呢？

费根鲍姆发现自己在探究哪种数学形式主义可以对应于

人类的感觉，特别是这样的感觉，它滤掉经验中含糊的多重性而找出普适性质。红色不一定是牛顿派所说的一种特殊的光频带宽。它是混沌世界的一片领地，这片领地的边界并不容易描述——但是我们的思维则发现红色是有规则地和可验证地一致的。这些就是一位年轻的物理学家的想法，看来与湍流之类的问题相差很远。然而，为了理解人类思维怎样整理感觉的混沌，我们确实必须明白无序怎样能产生普适性。

数值实验的兴起

当费根鲍姆开始在洛斯阿拉莫斯思考非线性时，他意识到自己所受教育没有教过他任何有用的东西。除了教科书中专门设计的特例外，求解非线性微分方程组是不可能的。微扰技术，即逐次修正一个可解问题，希望它与真正问题相接近，看来是愚蠢的。他通读非线性流和非线性振荡方面的教科书，发现对于有头脑的物理学家有用之处甚少。他的计算设备完全限于铅笔和纸，于是费根鲍姆决定从与梅在种群生物学方面所研究的相类似的简单方程开始。

这就是高中学生在几何课上用来画抛物线的方程。它可以写作 $y=r(x-x^2)$。每个 x 值产生一个 y 值，而所得曲线代表了两个数在值的范围内的关系。如果 x（今年的种群数）小，则 y（明年的种群数）也小，但比 x 大；曲线很陡地上升。如果 x 处于范围中间，y 的值就大。但是抛物线变平并开始下降，所以当 x 变大时，y 又变小。这就产生了生态模拟中的种群减少，以防止不现实的无限制增长。

对于梅以及后来的费根鲍姆，关键是并非只作一次简单

计算，而要把它作为反馈回路无限重复下去。每一次计算的输出都反馈回去，作为下一次计算的输入。为了从图上看出这个过程，那条抛物线很有帮助。沿 x 轴取一个起始点，向上画一条直线到与抛物线相交处，从 y 轴上读出结果值。用这个新值开始整个过程。这个序列先是在抛物线上跳来跳去，然后很可能回到一个稳定的平衡点，那里 x 和 y 相等，于是它们的值不再变化。

从精神上讲，这和标准物理学的复杂计算风马牛不相及。不是一次解完错综复杂的算式，而是一次再次地重复简单计算。数值实验者将盯着看下去，就像化学家凝视着烧杯中冒泡的反应一样。这里输出只是一串数字，而且它并不总是收敛到恒定的终值。它可能终于在两个值之间来回振荡。或者像梅曾对种群生物学家们所解释的那样，它可以持续混沌地变化下去，无论观察多久都是如此。这些不同的可能行为之间的选择依赖于调整参数的值。

费根鲍姆一方面进行这项不大富有实验性的数值工作，同时尝试用更传统的理论方法分析非线性函数。即使如此，他还不能看到关于这个方程能做什么的整体图象。但是他可以看出，各种可能性已经非常复杂，分析起来会极其困难。他也知道洛斯阿拉莫斯的三位数学家——米特罗波利斯、保罗·斯坦和迈伦·斯坦——在 1971 年已经研究过这类“映象”，而现在保罗·斯坦警告他说，那复杂性真是吓人。如果这个最简单的方程都无法处理，那科学家们为实际系统写出的远为复杂的方程将怎么样呢？于是费根鲍姆把整个问题束之高阁。

在混沌的简短历史里，这个看来很单纯的方程给出了最简洁的例子，表明不同类型的科学家怎样以许多不同方式看

待同一个问题。对于生物学家，这个方程带来了一条信息：简单系统可以做出复杂的事情。对于米特罗波利斯和两位斯坦，问题在于为各种拓扑图式编排目录，而不引用任何数值。他们从一个特定的点开始反馈过程，然后观察相继的数值在抛物线上跳来跳去。随着这些值运动到右面（R）或左面（L），他们记录下来一串串的字母 R 和 L。第一号式样：R。第二号式样：RLR。第 193 号式样：RLLLLLRRLL。这些字母串对于数学家来说具有某些有趣的特点——它们看来总是按同样的特定顺序重复。但对于物理学家来说，它们显得晦涩难懂和冗长乏味①。

那时人们不知道，洛伦兹已经在 1964 年观察过同一个方程，把它作为一个关于气候的深刻问题的隐喻。这个问题非常深刻，因此过去几乎没有人想到要提出来：气候是否存在？这就是说，地球上的天气有没有长期平均？那时和现在，大多数气象学家都认为答案是当然的。诚然任何可以测量的行为，不管它如何涨落，都应当有平均值。然而只要想一下，就会发觉这远非显然。洛伦兹指出，直至现在 12,000 年的平均天气与以前 12,000 年的平均天气显著不同，因为以前北美大部还被冰雪覆盖着。有没有一种气候会因为某个物理原因而变成另一种气候？或者，有没有一种更长期的气候，上述变化周期只是其中的涨落而已？或者，像天气这样的系统是否可能永远也不收敛到平均值？

洛伦兹还提出第二个问题。假如你真的可以写出控制天

① 这种“符号动力学”现在已经成为物理学者研究混沌的简单方便的工具。——校者

气的完备方程组。换句话说，假设你搞到了上帝自己用的密码，那末你是否能用这些方程来计算温度或雨量的统计平均值？如果方程是线性的，答案将是简单的“是”。然而，它们是非线性的。由于上帝并没有给出真实的方程，洛伦兹转而考察二次差分方程。

同梅一样，洛伦兹首先察看，给定某个参数时对方程进行迭代会发生什么情况。对于小参数值，他发现方程趋向一个稳定的不动点。当然，这一系统在最平凡的可能意义下在这里产生了一个“气候”——“天气”永远不变。对于更大些的参数，他看到了在两个点之间振荡的可能性，这里系统也向一个简单平均值收敛。但是在某一点之后，洛伦兹看到混沌产生了。由于他考虑的是气候，他不仅要问连续反馈是否会产生周期行为，还要问平均输出是多少。而且他已经认识到那答案是，平均值也会不稳定地涨落。当参数值始终只作极小改变时，平均值则可能剧烈变化。根据类比，地球的气候也可能永远不会可靠地进入具有长期平均行为的平衡状态。

洛伦兹关于气候的文章，作为数学论文是失败的，因为他在公理意义上什么也没有证明。作为物理论文，它也还有严重缺点，因为他不能证明可以用这样简单的方程去作出关于地球气候的结论。然而，洛伦兹明白自己在说些什么。“作者感到，这种相似性并非偶然，对于从一种流动方式向另一种方式的转变，事实上，对于整个不稳定现象，这个差分方程即使没有捕捉到它们的物理学，也捕捉到了大部分数学。”甚至20年后，也没有人能理解是何种直觉使他提出了如此勇敢的主张，它发表在瑞典的气象杂志《地球》上。（一位物理

学家痛苦地慨叹道："《地球》，没有人读《地球》。"）洛伦兹即将以前所未有的深度来理解混沌系统的特殊可能性——比他用气象学语言所能表述的更为深刻。

当洛伦兹继续揭开动力系统的变化着的面具时，他认识到，比平方映象稍复杂一些的系统可以产生其他类型的出乎意料的模式。藏在特定系统中的稳定解可以不止一个。一位观测者可能在相当长时间里只看到一种行为，然而完全不同的另一种行为对于这个系统也可能是同样自然的。我们说，这种系统具有"非传递性"。它可以处于两种平衡之一，但不能同时处于两者。只要从外面敲一下就可能迫使它改变状态。简单些，标准的摆钟就是非传递系统。恒定的能流从上紧的发条或电池经过摆轮机构进入。恒定的能流被摩擦力消耗。规则的摆动是一种显然的平衡态。如果一个过路人撞了一下钟，摆可能由于短暂的刺激加快或减慢，但很快回到平衡。然而钟还有第二种平衡态，也是它的运动方程的第二个有效解，那就是摆垂直悬挂而不运动的状态。气候本身可能是一个不那么简单的非传递系统——或许有几个行为完全不同的区域。

使用全球计算机模型来模拟地球大气和海洋长期行为的气象学家们，几年前就已知道他们的模型至少还允许另一种显著不同的平衡态。在全部过去的地质年代中，这另一种气候从来没有存在过，但它可能是控制地球的方程组的一个同样有效的解。这就是有些气象学家所说的"白色地球"气候：地球上的大陆被白雪覆盖，洋面冻成坚冰。冰封的地球将把来到的太阳辐射的70%反射出去，因此仍是极其寒冷的。大气的最低层，即对流层，要薄得多。从冰冻的地面上吹过的风暴将比我们所知的风暴小得多。一般说来，这样的气候对

于我们知道的生命更不利。计算机模型有很强的掉进“白色地球”平衡态的趋势，这使气象学家们奇怪：为什么它从来没有发生过。可能这只是个机遇问题而已。

为了把地球气候推进冰封态，需要从外界来的某种巨大冲击。但是洛伦兹还描写了另一种似乎可能的行为，他称它为“殆非传递性”。一个殆非传递系统在相当长时间里表现出一种平均行为，它在一定限度内有涨落。接着，它无缘无故地转入另一种行为，仍有涨落，但产生另一种不同的平均。设计计算机模型的人们知道洛伦兹的这一发现，但他们不惜一切代价来避免殆非传递性。这太难以预报了。他们的自然偏爱是使模型具有返回平衡的顽强倾向，这个平衡就是我们每天在真正的行星上测量的。然后，为了解释气候的巨变，他们求助于外部原因，例如地球绕太阳轨道的变化。然而，气象学家们不需伟大的想象力就可以看出来，殆非传递性可以很好地解释地球气候为什么以神秘的、不规则的间隔多次经历了漫长的冰期。果如此，则不必为这些时间间隔寻求物理原因。冰期可能只是混沌的副产品而已。

费根鲍姆的突破

就像一位爱好搜集枪支的人在这自动武器的时代怀念起老式的 0.45 口径手枪一样，现代科学家对 HP-65 手持计算器也有点留恋。在它流行的几年里，这个小玩意儿永久地改变了许多科学家的工作习惯。对于费根鲍姆来说，它是“铅笔和纸”与另一种尚未孕育成的使用计算机的风格之间的桥梁。

他没有听说过洛伦兹，但1975年夏天在科罗拉多的山间小镇阿斯本的一次聚会上，他听了斯梅尔讲同一个二次差分方程的某些数学性质。斯梅尔似乎认为在这个映象由周期变到混沌的准确转变点上，存在一些有趣而尚未解决的问题。像往常一样，斯梅尔对于值得探索的问题有敏锐的直觉。费根鲍姆决定再一次研究研究。他开始借助计算器把代数分析和数值探索一起用来拼凑出关于平方映象的知识，同时集中注意于有序和混沌之间的边界区。

在隐喻的意义上，也仅在此意义上，他知道这个区域与流体中层流和湍流之间的神秘边界相像。梅曾经请种群生物学家们注意的也是这个区域，这些人过去在动物种群变化中除了有序周期外看不到其他周期的可能性。在走向这区域中的混沌的道路上有一串倍周期转变，从2周期分裂成4周期，4周期分裂成8周期，等等，这些分裂具有迷人的式样。例如，在这些点附近，只要极小地改变一下舞毒蛾的生育力，种群就从4年周期变到8年周期。费根鲍姆决定先精确算出产生这些分裂的参数值。

终于因为计算器太慢，使他在那年8月才有所发现。每一次周期倍增的精确参数值要用好几分钟才能算出来。越往前走，时间越长。如果用快速计算机和打印机，费根鲍姆可能什么模式也看不出来了。但是他必须用手把数据记下来，然后在等待结果出来时还必须思索，然后为了省些时间，他必须猜测下一个答案将在哪里。

忽然他发现根本不必作猜测。这一系统中隐藏着一种出乎意料的规律性：这些数字是几何收敛的，就像在透视画中一排等同的电线杆收敛向地平线一样。如果你知道两个相邻

电线杆的大小，其余的也就都知道了；第二个与第一个之比也就是第三个与第二个之比，如此等等。倍周期的来临不只是越来越快，而是按照恒定速率越来越快。

为什么会这样？通常几何收敛的出现就提示人们，某种事物在某些地方正在不同的尺度上重复。但是，如果这个方程中有某种尺度模式，那还没有人见过。费根鲍姆以自己计算器的最高精度——3位小数——计算收敛比率，得到了一个数4.669。这个特殊的比率有什么意义吗？费根鲍姆做了任何关心数字的人会做的事情。他把这天内剩下的时间都用来尝试把这个数去凑合所有的标准常数——π，e，等等。结果一个也不对。

奇怪的是，梅后来意识到他也曾看到过这个几何收敛。但是他看过就忘记了。从梅的生态学前景看，这不过是个奇怪数值而已。在他所考虑的现实世界系统中，不论是动物种群或者甚至是经济模型系统，不可避免的噪声会压过任何此种精度的细节。正是那引导他走了如此之远的一团混乱使他在关键处止步。梅由于方程的整体行为而激动。他从未设想过，数值细节会证明是重要的。

费根鲍姆知道自己得到了什么，因为几何收敛意味着方程中有些尺度变换的性质，而他知道尺度变换是重要的。全部重正化理论依赖于此。在显然不守规矩的系统中，尺度变换意味着一切都变时有某些性质保持下来了。在方程的湍流表面之下藏着某种规律性。但是在哪里呢？很难看出下一步该怎么办。

在空气稀薄的洛斯阿拉莫斯，很快夏去秋来，将近10月底时，费根鲍姆突然产生了一种怪想法。他知道米特罗波利

斯和两位斯坦还曾考察过其他方程，并发现某些模式从一类函数传到另一类函数。出现 R 和 L 的同样一些组合，而且按同样的先后顺序。有一个函数包含一个数的正弦，这一转折使费根鲍姆为抛物线方程精心设计的研究方法成为不相干的了。他还得从头算起。于是他再次拿起 HP-65，开始为 $x_{t+1}=r\sin\pi x_t$ 计算倍周期。计算三角函数使过程减慢很多，费根鲍姆怀疑他能否像处理那个较简单的方程一样找到一条捷径。在扫视那些数字时，他确信它们又是几何收敛的。只需要为这个新方程计算一下收敛速率就成了。他的猜度仍然是有限的，不过他还是得到了有三位小数的结果：4.669。

这是同一个数。不可思议的是，这个三角函数所表现的并不只是一种一致的几何规律性。它表现出的规律性在数值上和一个简单得多的函数完全等同。没有任何现存的数学或物理理论可以解释，为什么两个形式和意义如此不同的方程应当导致同一结果。

费根鲍姆打电话给保罗·斯坦。斯坦对于在这样缺乏证据的情况下就相信这一符合是没有准备的。精度毕竟太低。尽管如此，费根鲍姆还是打电话给他在新泽西州的双亲，告诉他们自己碰上了某种深刻的东西。他告诉母亲他将因此而成名。然后他开始试其他函数，一切他可以想到的经过一系列分岔而走向无序的函数。每个函数都产生同一个数。

费根鲍姆终身与数打交道。当他十几岁的时候，就知道怎样算出许多人要查表的对数和正弦值。然而他从来没有学习过使用比他的计算器更大的计算机，在这一方面他同某些物理学家和数学家一样典型，这些人倾向于轻视计算机工作所包含的机械性思维。可是现在机会来了。他请求一位同事教给

他公式翻译（FORTRAN）语言，一天下来，他已经为一批函数求出了这个常数到5位小数：4.66920。那天夜里，他阅读手册中关于双倍精度的用法，第二天他已经得到4669201609O——足够说服斯坦的精确度。然而，费根鲍姆并不确信他已经说服了自己。他已开始寻找规律性——这就是理解数学的涵义所在，但是他也已开始知道那些特殊种类的方程，就像特殊的物理系统一样，是具有专门的特征性的行为方式的。这些方程毕竟是简单的。费根鲍姆懂得二次方程，懂得正弦方程——那数学是再简单不过了。然而在这些非常不同的方程的深处，有某种东西一再重复，产生同一个数。他确实撞上了什么：或许仅仅是件珍玩，或许是自然界的一条新定律。

设想一位史前动物学家断定某些东西比另一些重——它们具有某种被他称为"重量"的抽象性质，而他想科学地研究一下这种想法。他从来没有实际测量过重量，但是觉得自己对这一思想有某种理解。他观察大蛇和小蛇，大熊和小熊，他猜想这些动物的重量可能与它们的大小有某种关系。他造了一架秤并开始称蛇。他惊奇地发现每一条蛇都同样重。他惊恐地发现所有的熊也一般重。他进一步惊诧地发现，熊和蛇也一样重。重量全是4.6692016090。显然重量不是他所料想的东西。整个概念需要重新思考。

翻滚的水流，摆动的摆，电子振荡器——许许多多的物理系统在走向混沌的道路上要经过一个转变点，而这些转变点分析起来仍然过于复杂。所有这些系统的力学看来是完全明白的。物理学家们知道所有的正确方程；可是看来却不可能从方程发展出对整体的长时间行为的理解。不幸的是，流体的方程，甚至摆的方程，比那简单的一维逻辑斯蒂映象具有大

得多的挑战性。然而，费根鲍姆的发现意味着这些方程是不相干的。它们是无关的。当有序出现时，它突然似乎忘记了原来的方程是什么。不论是二次或三角函数，结果是一样的。费根鲍姆说："物理学的全部传统是，你只要孤立出机理，其他一切都随之而来。现在完全垮台了。这里你知道正确的方程，但它们简直无济无事。你把所有的微观小块拼起来，但是不能把它们延伸到长期行为。它们不是问题的重要之点。'理解事物'的涵义完全改变了。"

虽然这些数和物理学的联系还是含糊不清的，费根鲍姆已经有理由认为必须开辟一条计算复杂非线性问题的新途径。在此之前，所有可用的技术都依赖于函数的细节。如果那是正弦函数，费根鲍姆就得精心搞一套正弦计算。他发现的普适性表明，所有这些技术都应当抛弃。那规律性与正弦没有什么关系，与抛物线也没有关系，与任何一个特定函数都没有关系。但是为什么？真是令人沮丧。大自然在一瞬间拉开帷幕，让人们看一眼那意外的有序。这帷幕后面还有什么呢？

普适性理论

当灵感来到时，它像是一张画，两小一大三个波纹图形在头脑中的印象。这就是一切——铭刻在脑海中的明亮而清晰的图象，或许它并不比从意识海洋水平面下的思维处理过程中冒出来的一座巨大冰山的可见顶端更大。它必须与尺度有关，它给费根鲍姆指明了他所需要的道路。

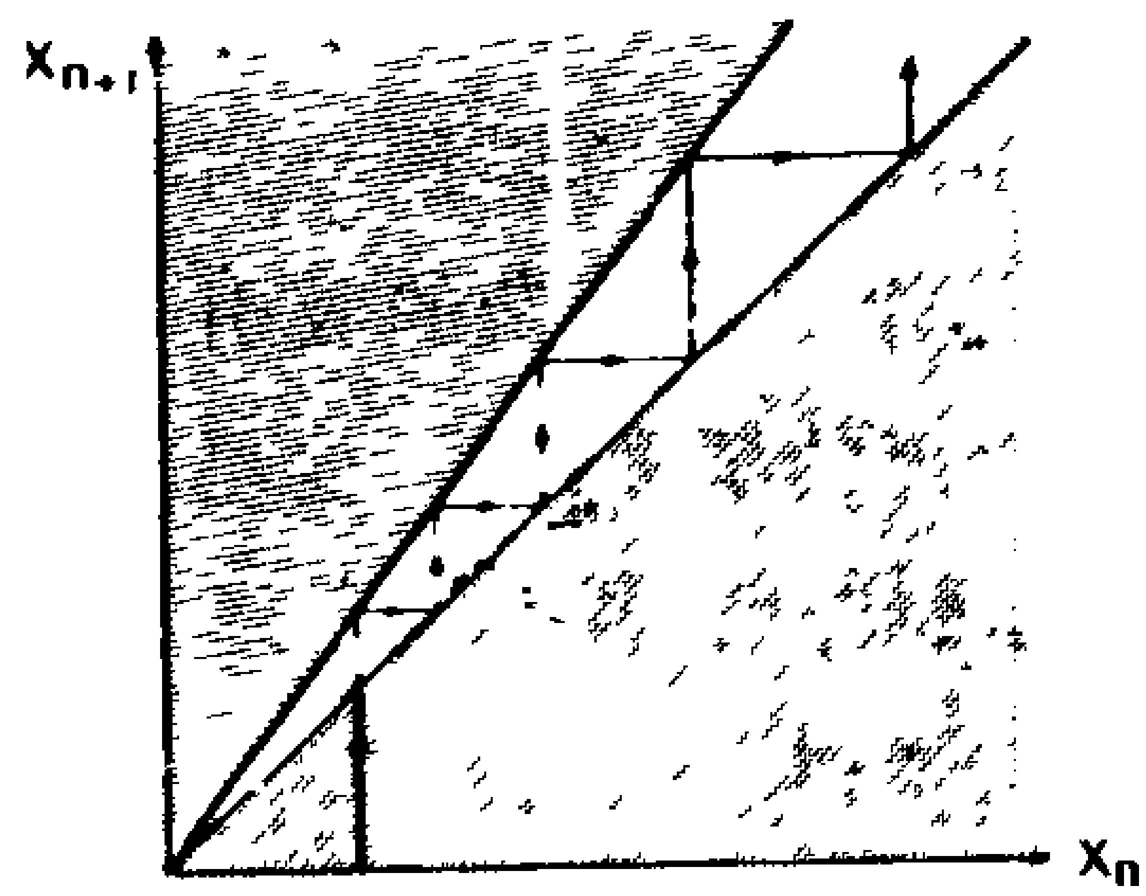
他在研究吸引子。它的映象达到的恒定平衡是一个不动点，这个点吸引所有其他的点——不论初始"种群"如何，它

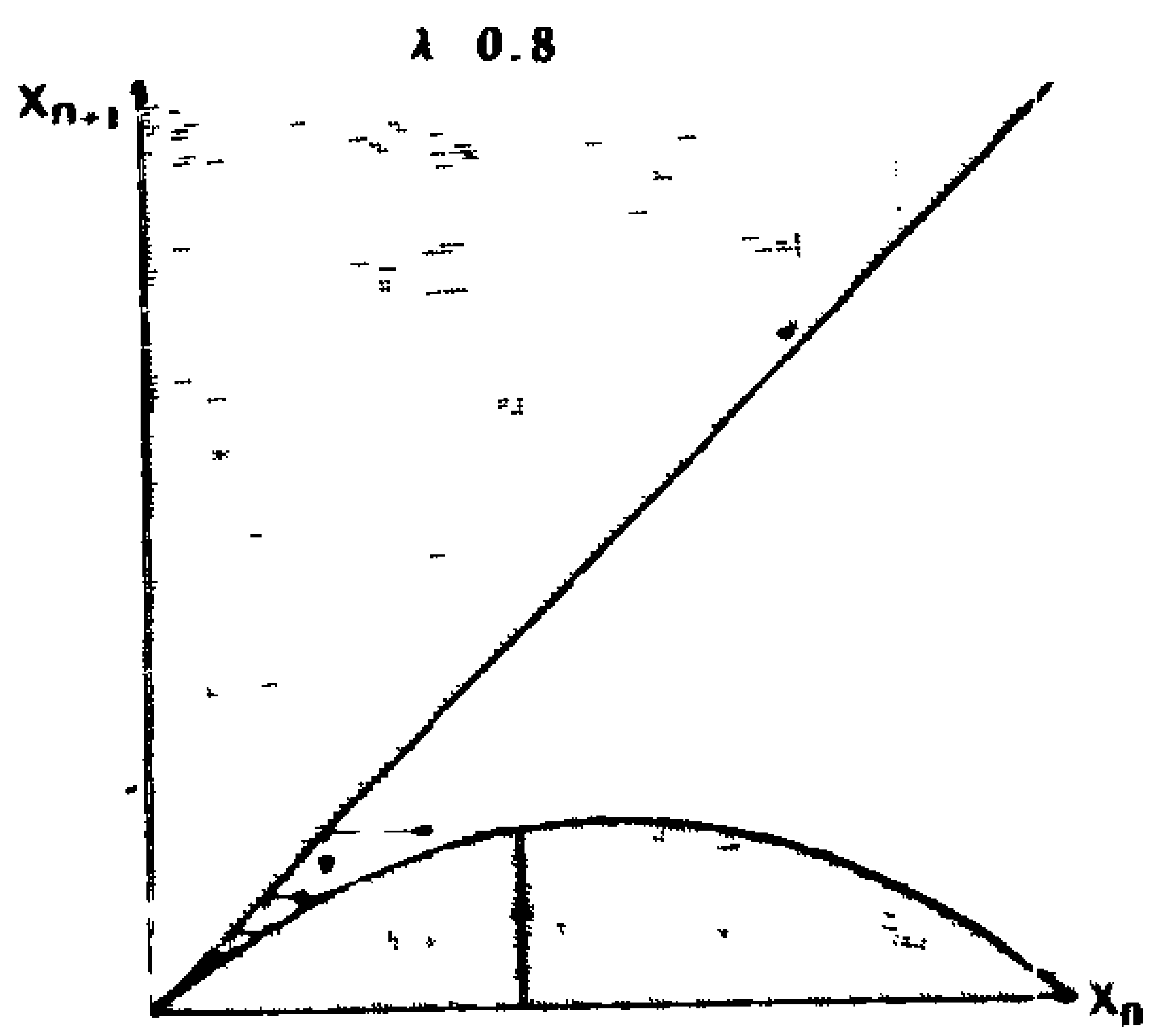
都持续地跳向吸引子。然后，第一次倍周期时吸引子分裂成两个，就像细胞分裂一样。最初这两个点实际靠在一起；然后，随着参数增大，它们逐渐漂开去。然后再次倍周期：吸引子中的每个点同时再度分裂。费根鲍姆的常数使他可以预料何时会发生倍周期。现在他发现可以预言这个日趋复杂的吸引子——两点、四点、八点……——上每个点的精确数值。他可以预言在年复一年的振荡中达到的实际种群数。原来这里还有另一种几何收敛。这些数也遵从尺度变换律。

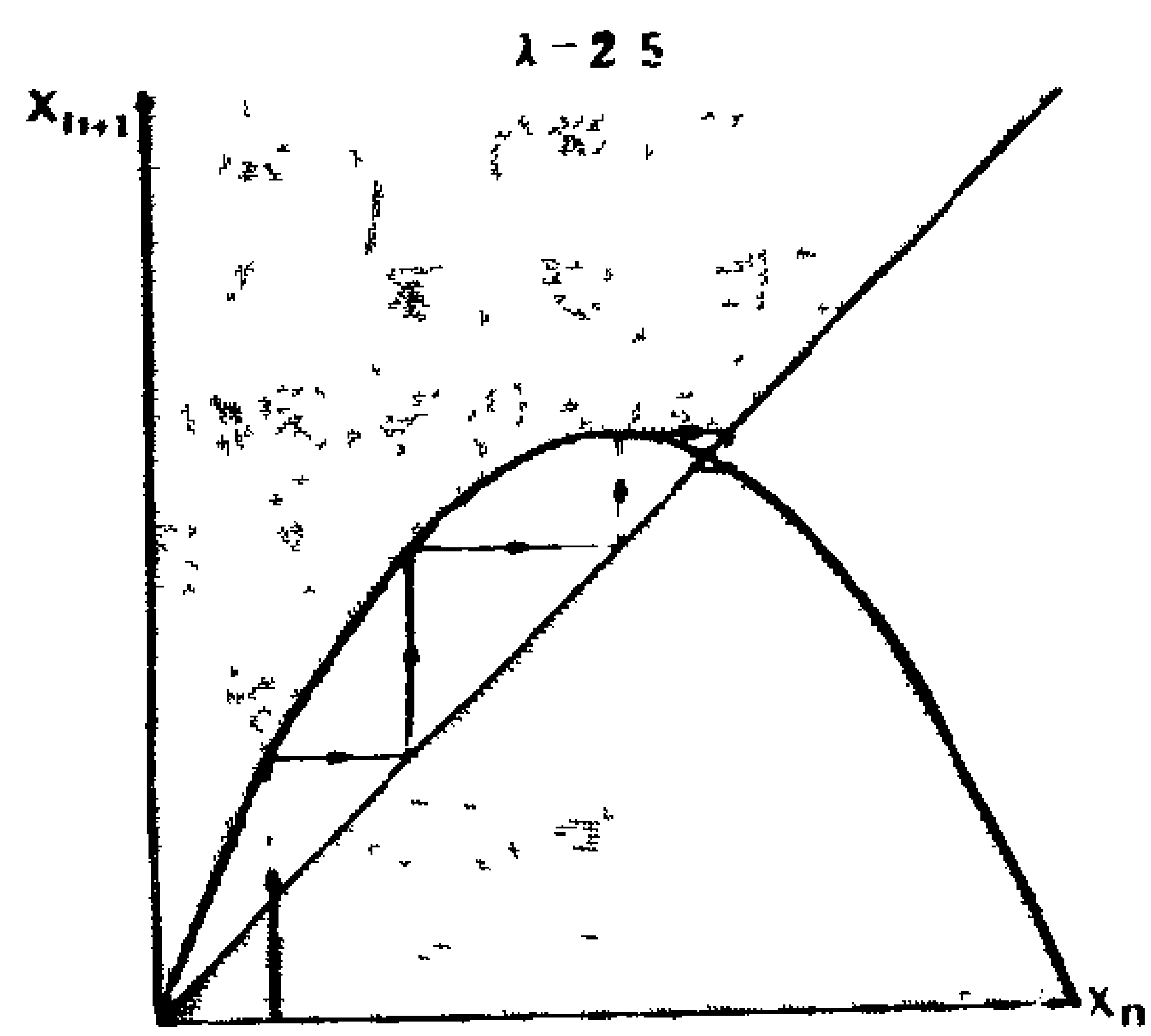
费根鲍姆在探索数学和物理之间一片被遗忘的土地。他的工作难以归类。这不是数学，因为他什么也没有证明。他诚然是在研究数字，可是数字对于数学家来说，就好像几袋硬币对于投资银行家一样——名义上是他职业中的要素，实际上过于琐碎和特殊，因而不值得在这上面浪费时间。数学家们的真正货币是思想。费根鲍姆是在实现一个物理课题计划，而看来奇怪的是，它几乎是一种实验物理。

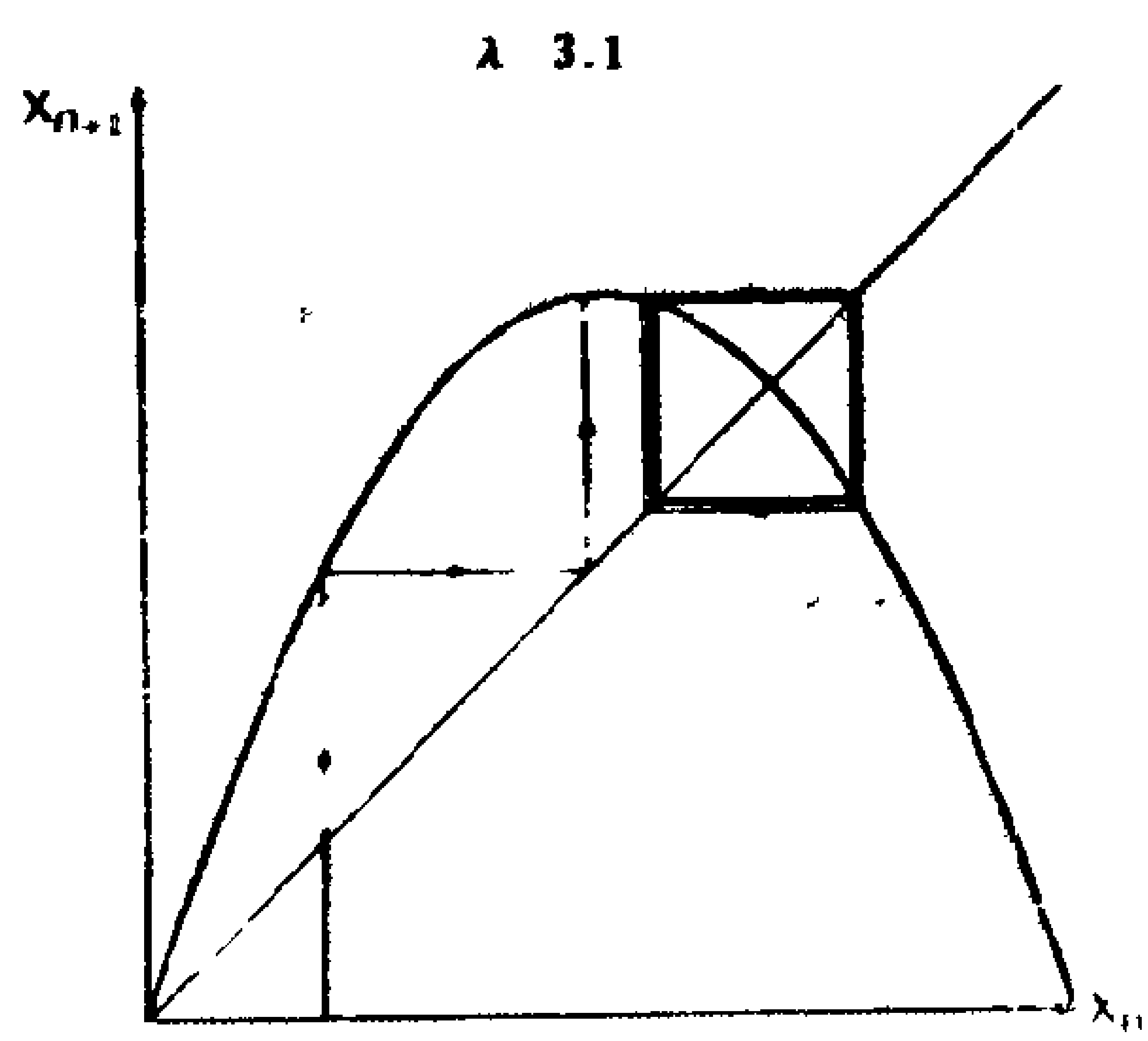
他不再研究介子和夸克，而把数字和函数作为研究对象。它们有轨线和轨道。他需要探求它们的行为。用后来在这门新科学中成了陈词滥调的一个短语说，他需要“创造直觉”。计算机就是他的加速器和云雾室。和建立理论同时，他还在创立一套方法。通常计算机用户构造一个问题，输入机器，等待算出解来——一个问题，一个解。费根鲍姆和后继的混沌研究者们需要的更多。他们要做洛伦兹做过的事：创造一些微型宇宙，观察它们的演化。然后他们可以改变这种或那种性质，再观察由之得到的变化了的历程。他们终究用新的信念武装了起来，即某些性质的微小变化可能导致整体行为的显著改变。

费根鲍姆很快发现，洛斯阿拉莫斯的计算机设施对于他


X_{n+1}
X_n


λ 0.8
X_{n+1}
X_n


λ-2 5
X_{n+1}
X_n


λ 3.1
X_{n+1}
X_n

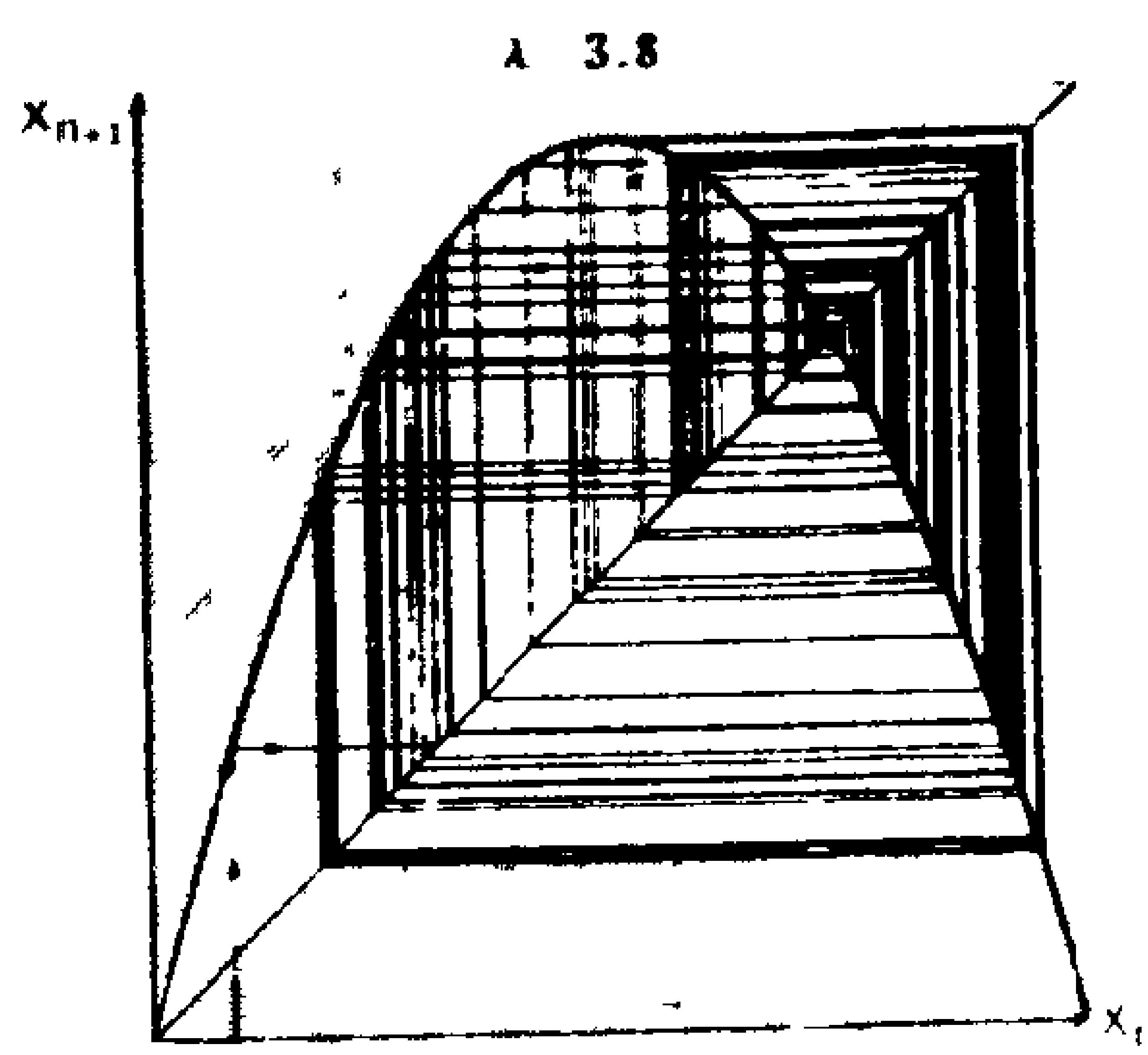

λ 3.8
X_{n+1}
X_n

图7 1 瞄准混沌

简单方程，多次重复：费根鲍姆集中注意于简单的函数，取一个数作为输入，产生另一个数作为输出。对于动物种群，一个函数可能表示今年和明年种群数的关系。

使这类函数形象化的办法之一是作图，把输入标在横轴上，输出标在纵轴上。对于每个可能的输入 x，只有一个输出 y，它们形成由粗实线代表的形状。

为了表示系统的长期行为，费根鲍姆画出一条从某个任意的 x 出发的轨道。由于每个 y 都要反馈给同一个函数作为新的输入，可以采用一种简捷的图解方法：轨道每次从45度线即 $x=y$ 的线弹跳起来。

对于生态学家，种群增长的最显然的函数是直线——这就是马尔萨斯的每年以一定百分率稳定无限增长的模型（左上图）。更现实的函数形成一段拱形线，使种群数在太大时降下来。左图演示的是“逻辑斯蒂映象”，它是由函数 $y=rx(1-x)$ 定义的一条完美的抛物线，其中由0变到4的 r 值决定抛物线的陡度。但是费根鲍姆发现，用哪一类拱形线是无关紧要的；方程的细节不是关键，重要的是函数应当有一处“隆起”。

然而，函数的行为敏感地依赖于陡度，即非线性的程度，或者是梅所说的“盛衰度”。太平缓的函数会导致种群灭绝：任何初始种群数最终都要回到零。增加陡度，就会产生传统的生态学家所预期的恒定平衡；把所有轨道都拉进去的那个点，是一个一维“吸引子”。

超过某一点后，分岔导致周期2的振荡种群数。然后会发生更多的倍周期，而最终（右下图）轨道根本不再有归宿。

当费根鲍姆试图构造一个理论时，这些图形是他的出发点。他用递归的语言开始思考：函数的函数，函数的函数的函数，如此继续；具有2个隆起的映象，具有4个隆起的……。

要想发展的那种计算风格很不适宜。洛斯阿拉莫斯虽然拥有比多数大学庞大得多的计算机资源，但是只有很少可以显示

曲线和图形的终端，而这少数终端又属于武器部。费根鲍姆想把数据取来在图上打点。他不得不求助于能想出来的最原始办法：在长卷打印纸上输出一行一行的空格，每行后面是一个星号或加号。洛斯阿拉莫斯的官方政策是：一台大计算机比许多小计算机好得多，这是与“一个问题，一个解”的传统一致的政策。小计算机不受鼓励。加之任何部门要买计算机都必须遵从政府的严格规定并经过形式上的审议。只是后来，同理论部的预算员“共谋”之后，费根鲍姆才得到了一台价值20,000美元的“桌上计算器”。这时他才可能在运行中改变方程和图形，搓捏和调整它们，把计算机当作乐器来抚弄。那时能认真作图的终端都在高保密区里——用当地的说法，在篱笆后面。费根鲍姆必须使用一个靠电话线连接到中央计算机上去的终端。在这样的工作条件下，很难感受到连接线另一端计算机的实际能力。最简单的任务也要用好几分钟。为了编辑一行程序，就得在按过“回车”键之后听终端连续地哼哼，等待中央计算机把它的电子轮盘转遍实验里的其他用户。

他一边算，一边想。什么样的新数学才能产生他正在观察的多重尺度的模式？他意识到，这些函数里必须有点“递归”、“自我引用”的东西，一个函数的行为由藏在里面的另一个函数的行为导引。在灵感来到的瞬间浮现的波状图象，表现了某种改变一个函数的尺度以匹配另一个函数的办法。他使用重正化群理论的数学，用尺度变换把无穷大化为可处理的量。在1976年春天，他进入了过去从未经历过的紧张生活状态。他像入定般地集中注意力，发狂地编程序，用铅笔涂乱，再写程序。他不能打电话到计算部求助，因为那意味着要切断计算机来使用电话。而重新连接起来就要碰运气了。他停下来考虑不

能超过5分钟，因为那样中央计算机就会切断他的连接。计算机还时而出毛病，使他着急发脾气。他不停地工作了两个月，每天工作22小时。他在头脑嗡嗡叫时才去睡一下，两个小时之后醒来时他的思想又准确地回到原来暂停处。他的食物只是咖啡。（甚至于在健康和安闲的时候，费根鲍姆也只靠最瘦的牛羊肉、咖啡和红葡萄酒生活。朋友们猜想，他准是从香烟中吸取维生素。）

最后，医生干预了。给他开了安定性处方和一次强迫休假。但这时费根鲍姆已经创立了一个普适性理论。

退稿信

普适性在美妙和有用之间作出了区别。数学家们到一定的地步就不大关心他们是否在提供一种计算技术。而物理学家们到一定地步就需要数字。普适性提供了物理学家可以靠解决简单问题的办法来求解困难得多的问题的希望。答案会是相同的。进一步把理论放入重正化群的框架后，费根鲍姆就把它打扮得被物理学家认为是几乎标准的计算工具。

然而，使普适性有用之处，也使物理学家难以置信。普适性意味着不同系统的行为相同。当然，费根鲍姆只是在研究简单的数值函项。可是他相信他的理论表达了系统在从有序到湍流的转变点上的一条自然规律。每一个人都知道湍流意味着不同频率的连续谱，但大家都不知道这些不同的频率来自何处。忽然你看到这些频率鱼贯而来。其中的物理含义就是现实世界中的系统将有同样可识别的行为，而且测量结果也应当相同。费根鲍姆的普适性不仅是定性的，而且是定量的；不

仅是结构上的，而且是度量上的。它不仅表现在模式中，而且表达为精确数字。这，物理学家可不敢轻信。

许多年之后，费根鲍姆还在一个顺手可及的抽屉中保存着那些拒绝发表他的论文的信件。这时他已经得到了所需的全部承认。他在洛斯阿拉莫斯的工作赢得了奖金和荣誉，从而给他带来了声望和金钱。然而，仍使他感到怨恨的是，他开始投稿后的两年中，最高学术刊物的主编们曾认为他的论文不宜发表。科学上的突破由于独创和出乎意料而不得发表，这种观念看来成了有点老掉牙的故事。现代科学有着巨量的信息流和公正的同行评审制度，不应有口味之争。有位退回费根鲍姆手稿的编辑，多年后承认他是拒绝了一篇成为整个领域转折点的论文；不过他仍然争辩说该文当时不适于他的杂志的应用数学家读者们。在这段时间里，费根鲍姆的突破即使没有发表，也已成为一定的数学和物理圈子里的过热新闻。理论的核心是通过当代多数科学工作的传播方式——演讲和预印本——传播的。费根鲍姆在一些会议上描述了自己的工作，就有数以十计乃至数以百计的人索取论文复制件。

科莫会议

现代经济学大量地基于有效市场理论。知识被假定为处处自由流通之物。那些作重要决定的人们被认为拥有大体相同的信息。当然，不知情或当作内部消息的地区到处都有，但就整体而言，知识一旦公布，经济学家们就假定它是处处皆知的。科学史家们往往认为自己的有效市场理论是当然的。发现一旦作出，思想一经表达，它就被认为已经成为科学界

的共同财产。每一项发现和每一种新的洞察都基于前面已有的结果。科学就像建筑物，一块砖一块砖地建立起来。对于一切实际目的，知识编年史都可以是线性的。

当一门明确定义的学科期待解决一个明确定义的问题时，上述科学观的作用最好。例如，没有人误解过DNA分子结构的发现。然而，思想史并不总是这样齐整。当非线性科学从不同学科的古怪角落里冒出来时，思想的流通并没有遵从历史学家们的标准逻辑。混沌作为自在之物的出现，就不仅是一个关于新理论和新发现的故事，而且是对老思想的姗姗来迟的理解。这一难题的许多片段已在很久前被庞加莱、麦克斯韦甚至爱因斯坦看见过但又被遗忘掉。许多新片段最初只有少数局内人知晓。数学发现为数学家们所理解，物理发现为物理学家们所理解，气象发现谁也不理解。思想的传播方式变得同它们的产生方式一样重要。

每一位科学家在心目中都有知识先辈的群星，有自己的一幅思想风景画，每幅画限制在独特的视野内。知识不是完美无缺的。科学家们由于学科习惯或受教育的偶然途径而有片面性。科学世界又是出奇地有限。把历史推进新的通道的不是科学家委员会，而是一小批个人，他们各有自己的感受和目的。

此后，便开始形成关于哪些革新和贡献最有影响的一致意见。然而这种一致意见也总会带有某种修正的成分。在发现的热潮中，特别是70年代后期，没有哪两位物理学家或两位数学家按准确相同的方式去理解混沌。习惯于没有摩擦和耗散的经典系统的科学家会把自己置于始自俄国人柯尔莫果洛夫和阿诺德等的世系中，习惯于经典动力系统的数学家会想

象从庞加莱、伯克霍夫、莱文森到斯梅尔的一脉相承。再晚一些，一位数学家心目中的群星会以斯梅尔、古根海默和茹厄勒为中心。或许他会把群星的重点放在与洛斯阿拉莫斯有关的具有计算倾向的一些先驱者乌勒姆、米特罗波利斯和斯坦身上。一位理论物理学家可能想到茹厄勒、洛伦兹、若斯勒和约克。一位生物学家会想到斯梅尔、古根海默、梅和约克。有无穷多种可能的组合。一位与材料打交道的科学家——地质学家或地震学家——会赞赏曼德勃罗的直接影响；而一位理论物理学家则至多会承认知道这个名字而已。

费根鲍姆的作用会成为争论的特别来源。几年之后，当他已经小有名气时，有几位物理学家出来引用其他一些人的工作，这些人曾经在同一时期研究同一问题，时间或许有几年之差。有人责备他在混沌行为的宽谱中集中注意于太狭窄的一小段。一位物理学家可能说，对"费根鲍姆学"估计太高了，它诚然是一项漂亮的工作，但是举例说，不及约克的工作那样影响深远。1984年费根鲍姆应邀到瑞典向诺贝尔讨论会发表演说，而争论就在那里展开了。曼德勃罗作了一个用意明显的尖锐报告，听众们后来形容成他的"反费根鲍姆演说"。曼德勃罗不知怎样发掘出20年前一位名叫麦堡的芬兰数学家关于倍周期的论文，而且一直把费根鲍姆序列称为"麦堡序列"。

但是费根鲍姆发现了普适性，并且建立了解释它的理论。这是使这门新科学得以转动的枢轴。由于当时不能发表这一令人惊讶的反直觉的结果，费根鲍姆1976年8月在新罕布什尔州的一次会议上，9月在洛斯阿拉莫斯的一次国际数学会议上，11月在布朗大学的座谈会上，作了一系列报告来传播这

个词。他的发现和理论遇到的是惊奇、不信任和激动。一位科学家对非线性考虑得越多，就越加感到费根鲍姆普适性的力量。有人简单地说，"如果你用正确方式来看非线性系统，就会看到其中有永远相同的结构，这真是使人非常高兴和震惊的发现。"有些物理学家不仅接受他的思想，还学会他的技术。只是玩弄这些映象，会使人扫兴。然而用自己的计算器，他们可以感受到使费根鲍姆继续在洛斯阿拉莫斯工作的那种惊奇和满足。他们还改进了理论。粒子物理学家斯维丹诺维奇在普林斯顿高等研究所听了费根鲍姆的报告后，协助他简化理论和推广普适性。然而，斯维丹诺维奇始终诡称这件事只是一种消遣，他不敢告诉同事们自己在做什么。

在数学家中，保留态度也曾占上风，这主要由于费根鲍姆并未提供一个严格证明。事实上，直到1979年才有了用数学语言的证明，这是兰福德的工作。费根鲍姆经常回忆起9月间在洛斯阿拉莫斯会议上向一批杰出的听众报告他的理论的情景。他刚刚开始描述自己的工作，著名的数学家卡茨就站起来问："先生，您想给数目字还是给证明？"

费根鲍姆回答说，比前者多，比后者少。

"是任何讲道理的人都称作证明的东西吗？"

费根鲍姆说听众可以自己判断。讲完以后，他征求卡茨的意见。卡茨拖着带挖苦意味的颤动的 *r* 音说，"是的，这果然是一个讲道理的人的证明．细节可以留给严格的（*r-r-rigorous*）数学家们。"

一个运动已经开始，普适性的发现又催着它前进。1977年夏天，两位物理学家，福特和卡萨蒂，组织了第一次关于一门称做混沌的科学的会议。会议在意大利科莫的一座优雅别

墅中举行。这座小城位于同名湖泊的南岸，令人眩晕的深蓝湖水中聚集着从阿尔卑斯山流下的融雪水。来了100个人，主要是物理学家，也有几位其他领域的好奇的科学家。福特说："费根鲍姆看到了普适性，发现了怎样作尺度变换，并且给出了一条走向混沌的道路，它是直觉地诱人的。这是我们第一次有了一个人人都能理解的清楚模型。

"而这是时机终于来临的事物之一。从天文学到动物学的许多学科中，人们在做同样的事，在狭隘的专业刊物上发表文章，完全不知道周围还有别人。他们以为是在单干，而他们又被看成在自己的领域里有点怪的人物。他们已经穷尽可以提出的简单问题，开始关心更为复杂的现象。当他们发现别人也都来了时，简直是感激涕零。"

云彩和绘画

后来，费根鲍姆住进一套空荡荡的房子。一间屋子里放了张床，另一间里是计算机，第三间屋子里有三个黑色的电子音箱，用来播放他的全套德国唱片。他曾有一次装饰住宅的实验：在意大利时买了一个昂贵的大理石咖啡桌，结果以失败而告终，原来他收到的只是一包大理石碎片。一堆堆的论文和书籍排列在墙边。他讲话很快，灰色夹褐色的长发从前额向后披去。"20年代发生了一些戏剧性的事。没有多少道理地，物理学家们碰上了关于周围世界的一种基本上正确的描述——因为量子力学理论在一定意义上是基本正确的。它告诉人们怎样可以取脏土来，用它造出计算机。这就是我们学来和宇宙打交道的方式。这也是制作化学药品、塑料和其他一切

东西的办法。人们知道怎样用它计算。它是一个相当好的理论——除了在有些层次上讲不大通。

“形象缺了某一部分。如果你问，这些方程实际上意味着什么，根据这个理论对世界的描述又如何，那末它不是需要一种你对于世界的直觉的描述。你不能设想一个粒子的运动好像是有轨道的。不允许你用这种方式来使它形象化。如果你开始提出越来越微妙的问题——这个理论告诉你世界是什么样子吗?—— 最终你会远离描绘事物的正规方式而遇到种种冲突。也许世界就是那个样子。但是你确实不知道为何不存在把所有这些信息汇总到一起而不要求如此彻底地背离你凭直觉感知事物的方式的另一种办法。

“物理学中有一条基本假定,就是理解世界的方法在于分隔出它的组成部分，直到你明白了你认为是真正基本的那些东西。然后，你就假定你还不懂的其他东西都是细节。根据这个假定，你可以从观察事物的单纯状态辨认出少量原理——这是真正的分析观念——然后，当你想解决比较肮脏的问题时，就设法用更复杂的方式把它们凑到一起，如果你能做到的话。

“最后，为了理解，你就必须‘换挡’。你必须重新组合你对正在进行的重要事物的想法。你可以尝试在计算机上模拟一个模型流体系统。这刚开始成为可能。但这可能是浪费精力，因为实际上发生的事与流体或方程无关。这是许多系统中当事物一再作用于自己本身时所发生情况的一般描述。它要求换一种方式来想问题。

“你瞧这房间时——你看见那里有一堆废物,这里坐着一个人，门在那里——你应当根据物质的基本原理写出波函数

来描述它们。这不是可行的想法。也许上帝才会做这事，但是对于理解这样的问题不存在分析的思想。

“一片云彩将如何，这不再是一个学术问题。人们很想知道它——这就是说有钱支持干这件事。这个问题在相当程度上属于物理王国，而且在相当程度上同前面的问题口径差不多。你在观察某种复杂事物，而目前求解的方法就是取尽可能多的点，你会有足够的数据说云彩在哪儿，热空气在哪儿，速度是多少，等等。然后把这些全插到你买得起的最大的计算机里，再试着估算它下一步的演变。然而，这不很现实。”

费根鲍姆捻熄了一支烟，点燃了另一支。“人们应当寻求不同的途径。应当寻求尺度结构，看看大零件和小零件关系如何。你瞧瞧流体的扰动，这是一些复杂的结构，其中的复杂性来自一种持续的过程。在一定的层次上，这些结构并不很关心过程的尺寸多大——它可能像一粒豌豆，也可能像一只篮球。这过程也不关心自己在哪里，也不关心进行了多久。在一定的意义上，能够普适的事物仅仅是可作尺度变换的东西而已。

“在一定程度上，艺术是人类怎样看世界的一种理论。十分显然，我们并不知道周围世界的细节。艺术家们所完成的就是意识到只有一小部分事物是重要的，然后看看这是些什么。因此他们可以代我完成一部分研究。如果你看一下凡·高的早期作品，他总是放进去无穷多的细节，他的绘画中总有极大量的信息。显然他想过，那些是不能再减少的必须放进去的东西。你也可以研究一下大约1600年以来的荷兰钢笔画中的地平线，和那些看起来极为真实的细小的树木和奶牛。再看仔细一些，那些树具有叶子似的边界，但是光这样还不

行，里面还加了些像细枝一样的东西。在较柔软的组织和有更明确的线条的东西之间，有一种确定的相互作用。这样的组合以某种方式给出了正确的感觉。再看看雷斯达尔和特纳怎样构造复杂的水流，这很清楚是用迭代的方法完成的。有那么一层东西，上面又画了些东西，然后再加以修正。这些画家的湍急水流里面总是具有尺度思想的某种东西。

“我真想知道怎样描写云彩。如果说这里是具有那种密度的一片，它旁边是具有这种密度的一片——把这么多详细信息积累起来，我想是错误的。这决然不是一个人感知这些事物的方式，也不是艺术家的感知方式。在某个地方，写出偏微分方程这件事并不是就这问题做了工作。

“在某种方式上，地球的奇妙前景就在于它包含着美好的东西，奇妙诱人的东西，你依靠自己的职业想去理解它们。”他把香烟放下。烟灰缸里飘起一缕轻烟，先是细细的柱状，然后（像是点头证实普适性）碎裂成卷须状，盘旋着向天花板升去。

8 实验家

> 这是一种与我能描述的其他体验不同的体验，是一位科学家所能有的最好的事情，即意识到在他或她头脑中发生的某种事情准确对应于自然界中发生的某种事情。每当发生这种情况，总是惊人的。自己思维的产物真正能在地地道道的外部世界里实现，使人惊奇不已。这是很大的冲击，很大很大的喜悦。
>
> ——卡丹诺夫

小盒中的氦

“利布沙伯成熟起来了。”在巴黎高师这所与高工一齐耸立在法国教育阶梯顶端的学府中，人们都这样说。作为低温物理学家，研究距绝对零度只有一丝之差的低温下超流体

氦的量子行为，他已经为自己赢得了杰出的名声。他在系里有显赫的声望和可靠的地位。可是人们奇怪是否“年龄不饶人”这句话对他开始应验，他竟然在1977年浪费自己的时间和学校的钱财，去做一个看来很平凡的实验。利布沙伯本人也担心，如果用研究生来做这件事，就可能危及他们的前程。于是他求助于一位职业工程师。

在德国人入侵巴黎之前5年，利布沙伯生在那里。他是波兰犹太人的儿子，一位犹太法学博士的孙子。他用同曼德勃罗一样的办法从战争中活了过来，即藏在乡村里，同父母分居，因为他们的口音太危险。他的父母也活过来了，但家庭的其他成员则死于纳粹统治。像是政治命运的嘲弄，利布沙伯本人因为受到本地一位贝当①秘密警察头目的保护而得救，此人具有强烈的右翼信念与同样强烈的反种族主义。战后这位10岁男孩作了报答。他不完全理解地在一个战争罪行调查委员会作了证，而证词救了那个人。

通过法国的学院式科学世界，利布沙伯在自己的行业中升起。人们从未怀疑过他的才华。同事们有时觉得他有点古怪——理性主义者群中的一位犹太神秘主义者，在多数科学家是共产党员的地方的一位戴高乐主义者。他们嘲笑过他的伟人史观，他对歌德的倾心，他的旧书癖。他有几百本原版科学著作，有些是17世纪的。他不是把它们作为历史珍品来阅读，而是作为关于现实的本质的新思想的源泉，这个现实正是他用激光器和高技术致冷线圈在探测着的。他发觉他的工程师莫勒是个合拍的人物，一位只做他想做的工作的法国

① 贝当是第二次世界大战时期法国卖国政府头目。——译者

人。利布沙伯想莫勒会觉得他的新计划是“逗乐的”——这是他对于“迷人的”、“激动人心的”或“深刻的”打了折扣的高卢人式的委婉说法。这两个人于1977年着手建立一个揭示湍流发生机制的实验。

作为实验家，利布沙伯以具有19世纪的风格而著称：聪明的头脑，灵巧的双手，总是宁可独出心裁而不去蛮干。他不喜欢庞大的技术和沉重的计算。他对于好实验的想法和数学家对于好证明的想法相像，优雅和结果同样重要。虽然如此，有些同事还是觉得他的湍流发生实验走得太远了。它小到足以放在火柴盒里带着跑——有时利布沙伯果真把它带来带去，就像带一件概念性的艺术品。他把它叫做“小盒中的氦”。实验的核心还要小得多，柠檬籽那么大的一个小腔，用不锈钢刻成，边角分明，四壁光滑。腔内注入冷却到绝对温度零上4度的液氦，这比利布沙伯老的超流体实验要热。

实验室在高师物理楼二楼，离巴斯德的老实验室只有几百英尺。就像一切好的通用物理实验室一样，利布沙伯的实验室总是处于一团混乱的状态中，地板和桌面上扔着涂料罐和工具，到处是奇形怪状的金属和塑料板。在这混乱之中，那装有利布沙伯的微小的流体腔的设备却具有显著的目的性。在不锈钢腔的下面是用高纯铜做的底板。上面是用蓝宝石晶体做的盖板。材料是根据它们的导热情况选择的。还有细小的电加热线圈和聚四氟乙烯垫片。液氦从一个液槽中流下来，液槽本身也只是半英寸的立方体。整个系统置于高度真空的容器内。为了使温度稳定，这个容器又放在液氮浴中。

振动总使利布沙伯不安。实验，就像真正的非线性系统，要抵制经常的噪声背景才能存在。噪声妨碍测量，破坏数据。

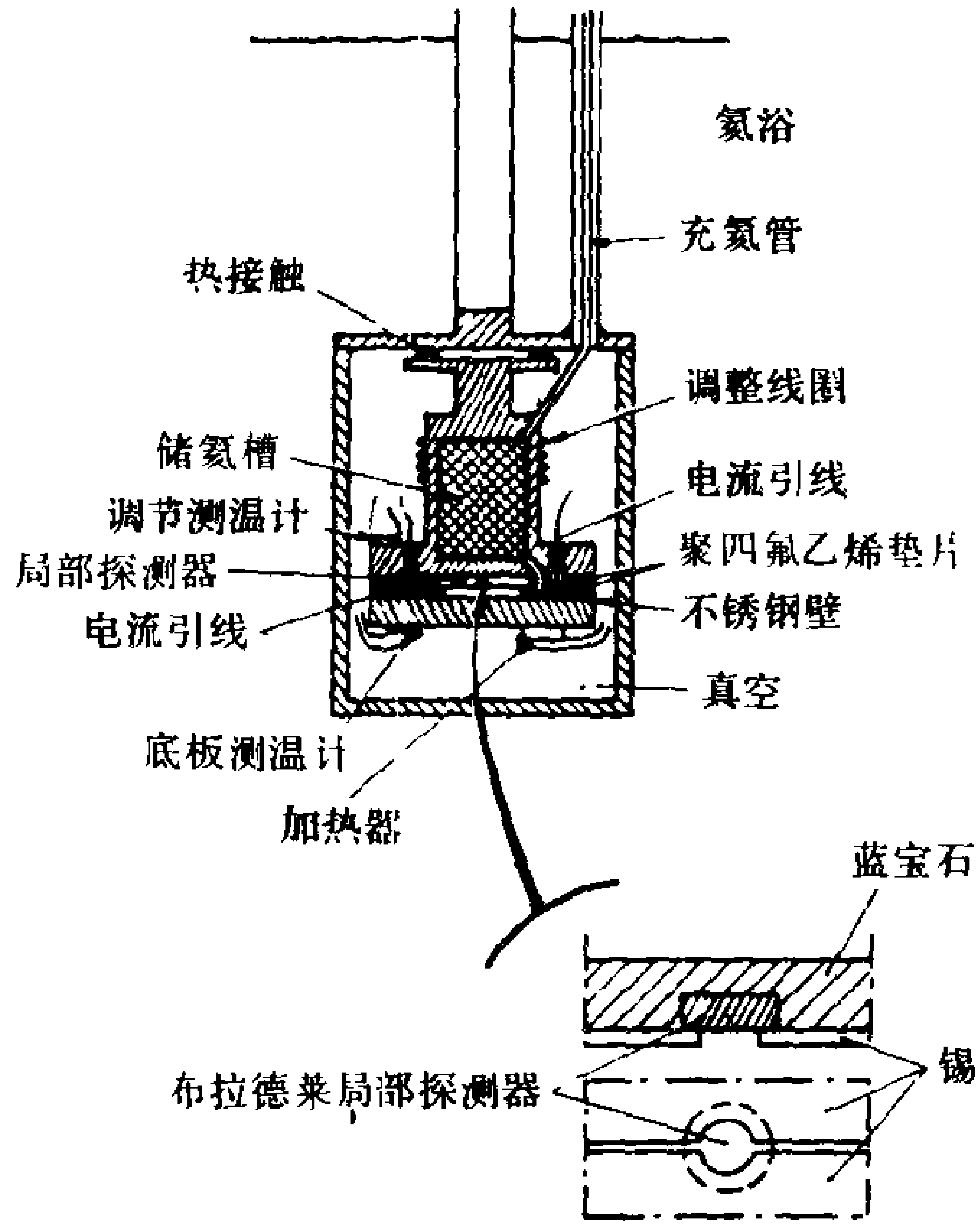


图8 1　“小盒中的氦”

利布沙伯的精巧实验：它的核心是精密加工的长方形液氦腔；细小的蓝宝石“测温计”测量流体的温度。小腔放在专门设计得可以屏蔽噪声和振动并精确控制加热的容器中。

在敏感的流中——而利布沙伯把流做得尽可能敏感——噪声可能尖锐地干扰非线性流，把它从一种行为踢到另一种。然而，非线性既可使系统稳定，又可使它失稳。非线性反馈调节运动，使它更坚定。在线性系统中，扰动具有恒定的效果。有非线性存在时，扰动可能自我抑制直到消失，而系统自动回到稳态。利布沙伯相信生物系统利用非线性来抵御噪声。蛋白质的能量传输，心电的波动，神经系统——全在喧嚣世界

中保持着自己的多面功能。利布沙伯希望，不管由什么结构支撑着，流体都足够厚实，得以在实验中测出。

他的计划是使底板热于顶板而在液氦中造成对流。这正是洛伦兹描述过的对流模型，经典的瑞利－贝纳德对流系统。利布沙伯不知道洛伦兹——那时候还不知道。他对费根鲍姆的理论也没有概念。1977年费根鲍姆正开始在科学界作旅行演说，他的发现由于科学家们知道如何去解释它们而出了名。但就大多数物理学家所能解释的而言，费根鲍姆学的模式和规则性与现实系统并无明显联系。这些模式是从数字计算器里出来的。物理系统要复杂无穷多倍。在没有更多根据之前，人们最多只能说费根鲍姆发现了一种看来像湍流开端的数学类比。

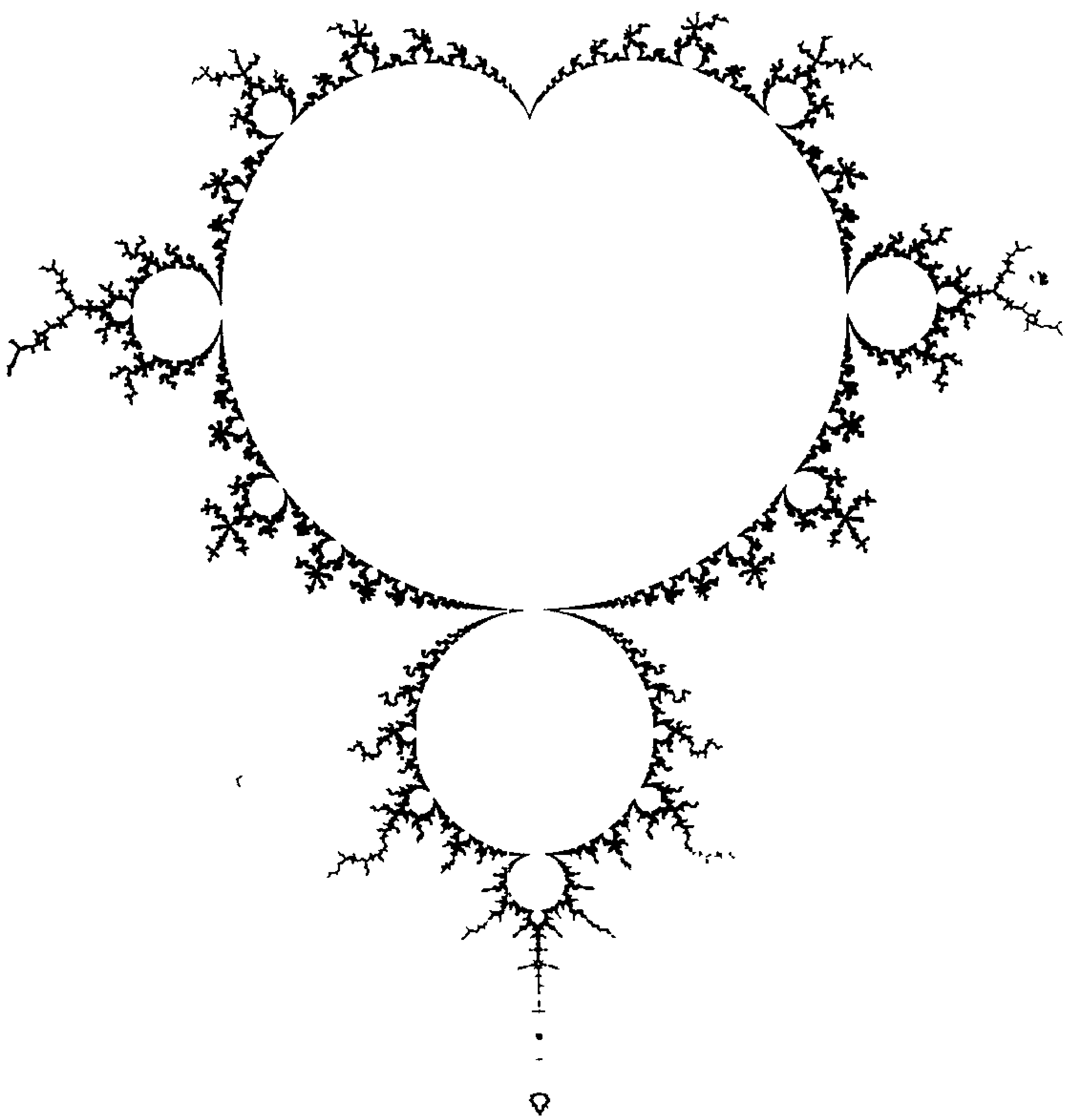
利布沙伯知道，在美国和法国做的一些实验已经削弱了朗道关于湍流发生的思想，因为这些实验表明湍流在一次突然转变中出现，而不是连续地堆积不同频率。像郭勒卜和斯文尼这些用旋转圆柱流做实验的实验家，已经证明需要新理论，但是他们还未能看到转变成混沌的清晰细节。利布沙伯知道，在实验里还没有出现过湍流发生的清楚形象，他判定这豆粒似的流体腔将给出具有最大可能清晰度的图景。

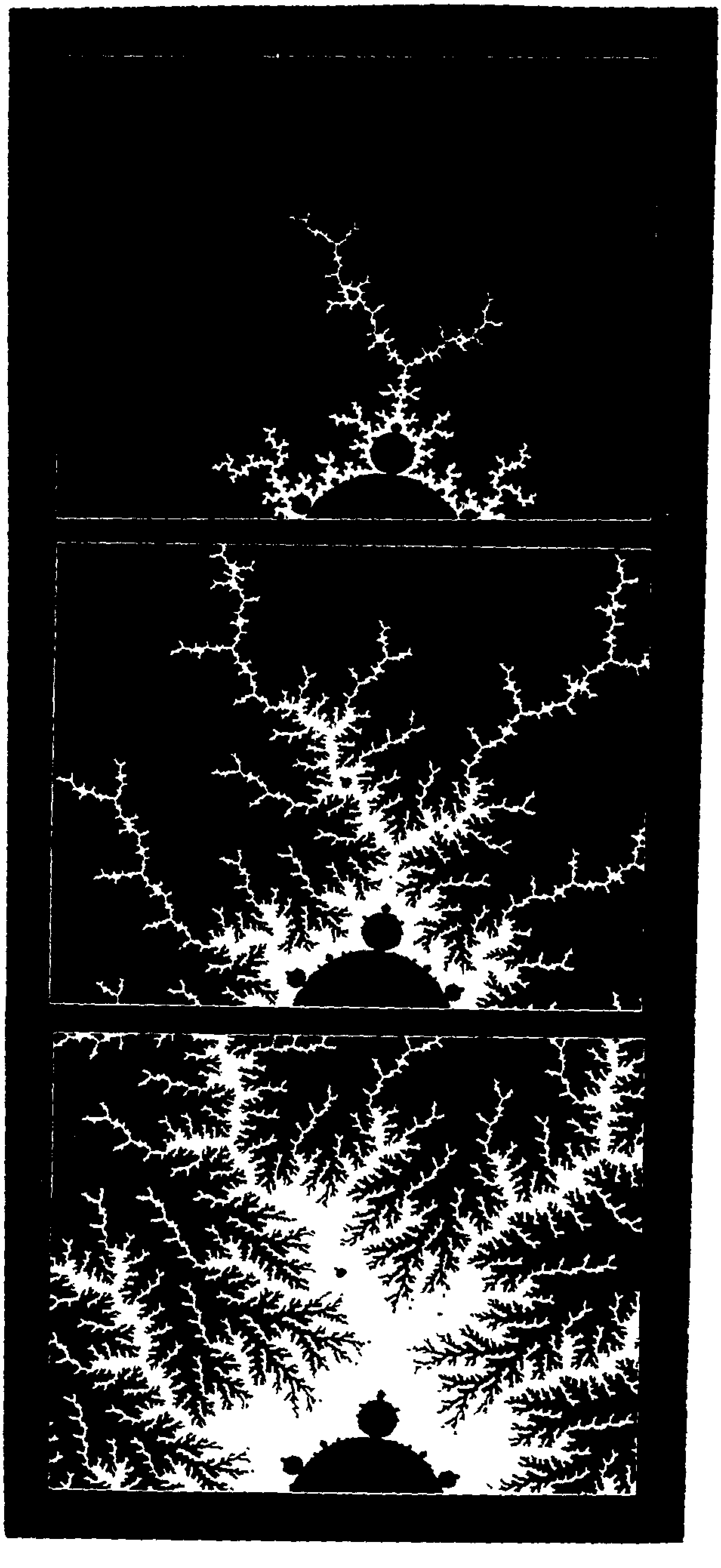
“固体中的非固体波动”

缩小视野有助于推动科学前进。流体动力学家们对斯文尼和郭勒卜宣称在库埃特流中达到的高精度所提出的怀疑，在他们看来是正确的。数学家们对茹厄勒所表示的不满，

在他们看来也是正确的。他破坏了规则。他在严格数学陈述的幌子下提出了一个雄心勃勃的物理理论。他使得他所假定的同他所证明的难以区分。数学家在一种思想满足"定理、证明、定理、证明"的标准之前总是拒绝予以承认的，他是在扮演这门学科分配给他的角色：有意无意地，他是在监视诈骗与神秘主义。由于新思想用不熟悉的风格写出，杂志编辑就拒绝发表，这会使被拒者觉得编辑是在维护那些已站住脚的同事们的地盘，同时他在这个谨防未检验过的事物的社会里也扮演了一个角色。正像利布沙伯本人所说，"科学建立在反对一切胡说八道之上。"当同事们把利布沙伯叫做神秘主义者时，这个称号并不总是意味着讨人喜欢。

他是一位细心、规矩、对自己所研究的东西看得很准的实验家。同时，他对于那叫做"流"的抽象的、定义不好的、鬼魅似的东西也有感觉。流是形状加变化、运动加形式。构想出微分方程组的物理学家会把它们的数学运动称为流。流是一种柏拉图思想，它假定系统中的变化反映了与特定时刻无关的某种现实。利布沙伯信奉柏拉图关于宇宙中充满隐形的见解。"你知道它们确实如此！你看见过树叶。当你观看所有的树叶时，难道不为一般形状的数目有限这一事实所触动？你很容易画出主要的形状。试一试理解这事是很有意思的。也可以研究其他形状。在实验中你见过一种液体穿进另一种液体。"他的桌子上堆满了这类实验的照片：液体的胖胖的指状分形。"好，在你的厨房里打开煤气炉，你看到火焰又是这种形状。它是很广泛的。它是普适的。我不管它是燃烧的火焰，还是液体在液体中，还是固态的晶体生长——我关心的是这个形状。





"从18世纪以来就有一种梦想，认为科学忽视了形状的空间演化和时间演化。如果你思考一下流，那可以从许多方面去想，经济流或者历史流。首先它可能是层流，然后分岔成更复杂的状态，或许还带有振荡。然后它可能是混沌的。"

形状的普适性，跨越尺度的相似性，流中之流的递归能力——这一切都超出用标准微积分处理变化方程的范围。但这并不容易看出来。科学问题是用有效的科学语言表述的。迄今为止，20世纪对利布沙伯关于流的直觉的最佳表述需要用诗的语言。例如，史蒂文斯描述过那种对走在物理知识前面的世界的感受。他对于流有一种神奇的怀疑，它是如何一面变化一面又自我重复：

> "鳞光闪闪的小河流啊流，
> 从来没有两回同样地流；
> 它流过了这么多的地方，
> 却像是站在那里没有流。"

史蒂文斯的诗篇经常透露着在空气和水中所看到的喧嚣。它还传递着一种信念，即自然界中的有序具备看不见的形式：

> "在没有阴影的大气里，
> 对事物的知识就在近旁但又无法感知。"

当利布沙伯和其他一些实验家在70年代开始观察流体运动时，他们的做法是带着与诗人的这种破坏意图相近的旨

趣的。他们怀疑在运动和普适形式之间有联系。他们用唯一可能的办法积累数据，即抄下数字或把它们记录到数字计算机里。然后他们寻求组织数据的方法，以便从中揭示形状。他们希望通过运动来表达形状。他们确信，像火焰这样的动态形状，像树叶这样的有机形状，都是借助于目前尚不了解的力量编织而得的。这些实验家，这些最无情地追求混沌的人们，由于拒绝接受任何可以冻结不动的现实而获得了成功。但是甚至利布沙伯也不至于用这种语言来表达，他们的概念很接近史蒂文斯所感受的“固体中的非固体波动”：

“荣誉的力量，气质的闪光，
万物萌生了，迁移了，又消散了，
或在远方，变化成虚无，
或像夏夜变幻，依稀可见，
那银白色的飘渺形态变近了，
忽而又消逝得无影无踪。”

自然界中的流和形

对于利布沙伯来说，是歌德而不是史蒂文斯带来神秘的灵感。当费根鲍姆还在哈佛大学图书馆里阅读歌德的《色彩论》时，利布沙伯已经设法在自己的收藏中增加了一本更冷僻的原版专著《论植物的变化》。歌德的这一著作从侧面攻击那些物理学家，他认为他们唯独关心静态的现象，而不关心产生了我们时时看到的形状的活生生的力和流。歌德的一部分遗产——在文学史家们看来可以略而不计的一小部分

——是德国和瑞士的伪科学流派，它是由像斯坦纳和施文克这样的哲学家保存下来的。利布沙伯也在一位物理学家力所能及的程度上赞赏这两位。

施文克用以描述力和形的关系的短语是“敏感的混沌”(*Das sensible Chaos*)。他把它用作1965年初版的一本奇怪小书的书名，此书后来曾脱销和重印数次。这首先是一本关于水的书。英文版前面有库斯图写的一篇充满赞赏的序，以及发表在《水资源通报》和《水工研究所杂志》上的表扬文字。有些冒充科学之处是此书的美中不足，但书中并没有冒充数学的地方。然而他的观察是无瑕的。他以艺术家的眼光展示了大量自然界中的流动形状。他汇集了许多照片并画了几十幅精确的图画，有如细胞生物学家通过第一台显微镜观察时所画出的草图。他的胸怀坦白和天真烂漫会使歌德感到骄傲。

流动充溢他的全书。大河如密西西比和法国的阿卡雄湾以宽广的曲线蜿蜒入海。就大海本身而言，墨西哥湾流也蜿蜒形成东西摆动的环流。就像施文克所说，这是一条在冷水之中的温水巨河，它“用冷水为自己构筑了堤岸”。当流动本身已经过去或无法看见时，流动的证据还是留下了。气流之河在沙漠上留下记号，显出波纹。消退的潮流在海滩刻下水脉之网。施文克并不相信巧合。他相信普适的原理，甚至不仅普适性而已，他相信自然界有某种精神，这使他的文章带有某种令人不适的拟人化色彩。他的“初始原则”是流“要实现自我，而与周围的材料无关”。

他知道，在主流中还有次级的流。沿蜿蜒巨流往下运动的河水，在次一级上绕着河的轴线流动，先流向一岸，往下到河床，潜向另一岸，再向上到表面，就像一个粒子绕面包圈

盘旋一样。水中任何粒子的痕迹形成一条线，它卷绕在其他线上。对于这类图形，施文克具有拓扑学家的想象力。“这种线缕缠绕成螺旋的图象，只有相对于实际运动而言才是精确的。人们常说‘缕缕’水流；然而它们实际上并不是单缕，而是完整的表面，在空间相互缠绕，彼此流过。”他看见在波浪中竞争的节律，波浪彼此压过，还有分界面和边界层。他看见涡流、涡旋和涡旋串，把它们理解为一个表面在另一个的旁边“滚动”。在这里他已经尽了哲学家之能事，来靠近物理学家关于近似湍流的动力学的概念。他的艺术家的信念就假定了存在普适性。在施文克看来，涡旋意味着不稳定性，而不稳定性意味着流正在和它自己内部的不相等战斗，而这不相等是“初始”的。涡流的滚动，蕨类植物的展开，山脉的起伏，动物器官的中空，在他看来全是同出一辙。它和任何具体的媒质无关，和特定种类的差异无关。那不相等可能是慢与快、热与冷、密与疏、咸与淡、黏与滑、酸与碱。而在边界上，生命兴旺繁荣。

然而，生命则是汤普森的领地。这位非凡的博物学家在1917年写道：“很可能所有的能量定律，所有的物质性质，所有的胶体的全部化学，对于解释肉体完全无能为力，就像它们无力说明精神一样。就我而言，我不这样想。”汤普森为生命研究带来的恰恰是施文克所致命地缺乏的：数学。施文克靠类比来论述。他的情形，尽管是精神的、华丽的、百科全书式的，但最终乃是演示相似性。汤普森的名著《论生长和形态》，兼有施文克的某些气质和他自己的某些方法。现代读者会惊叹地称赞那精细的对比图片，一边是悬挂在柔软卷须上的液滴形成许多分支而落下，一边是惊人地相似的活生生的水母。

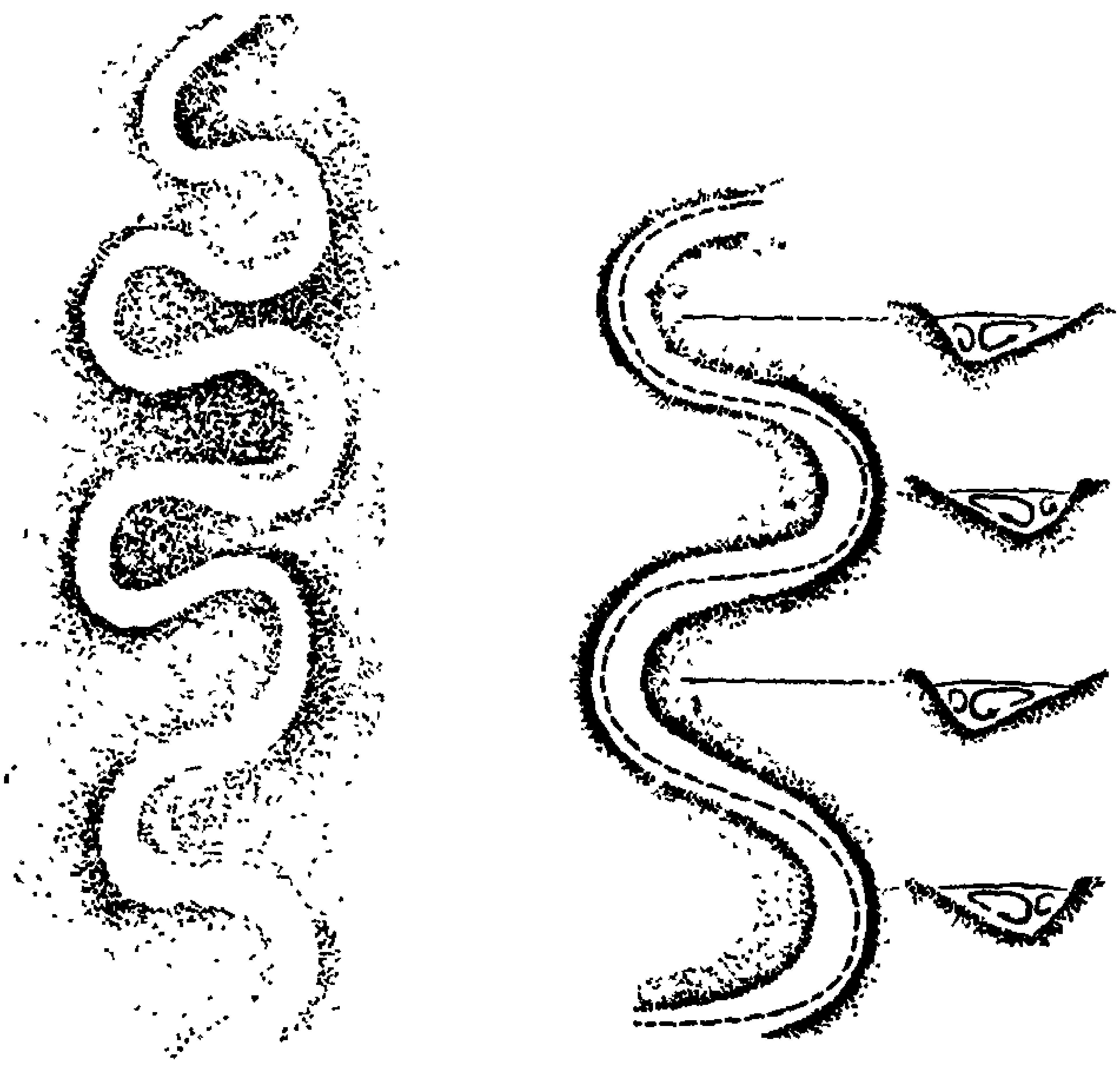


图8 4　蜿蜒和螺旋形的流

施文克把自然的流画成带有次级运动的缕缕细流。他写道："然而它们实际上并不是单缕，而是完整的表面、在空间相互缠绕。……"

难道这是一种炫博惊奇的巧合？如果两个形态看来相似，我们是否必须寻求相似的根源？

汤普森确实是古往今来站在正统科学外缘的最有影响的一位生物学家。在他有生之年已经发生的20世纪的生物学革命，完完全全从他身边经过。他不懂化学，误解了细胞，并且

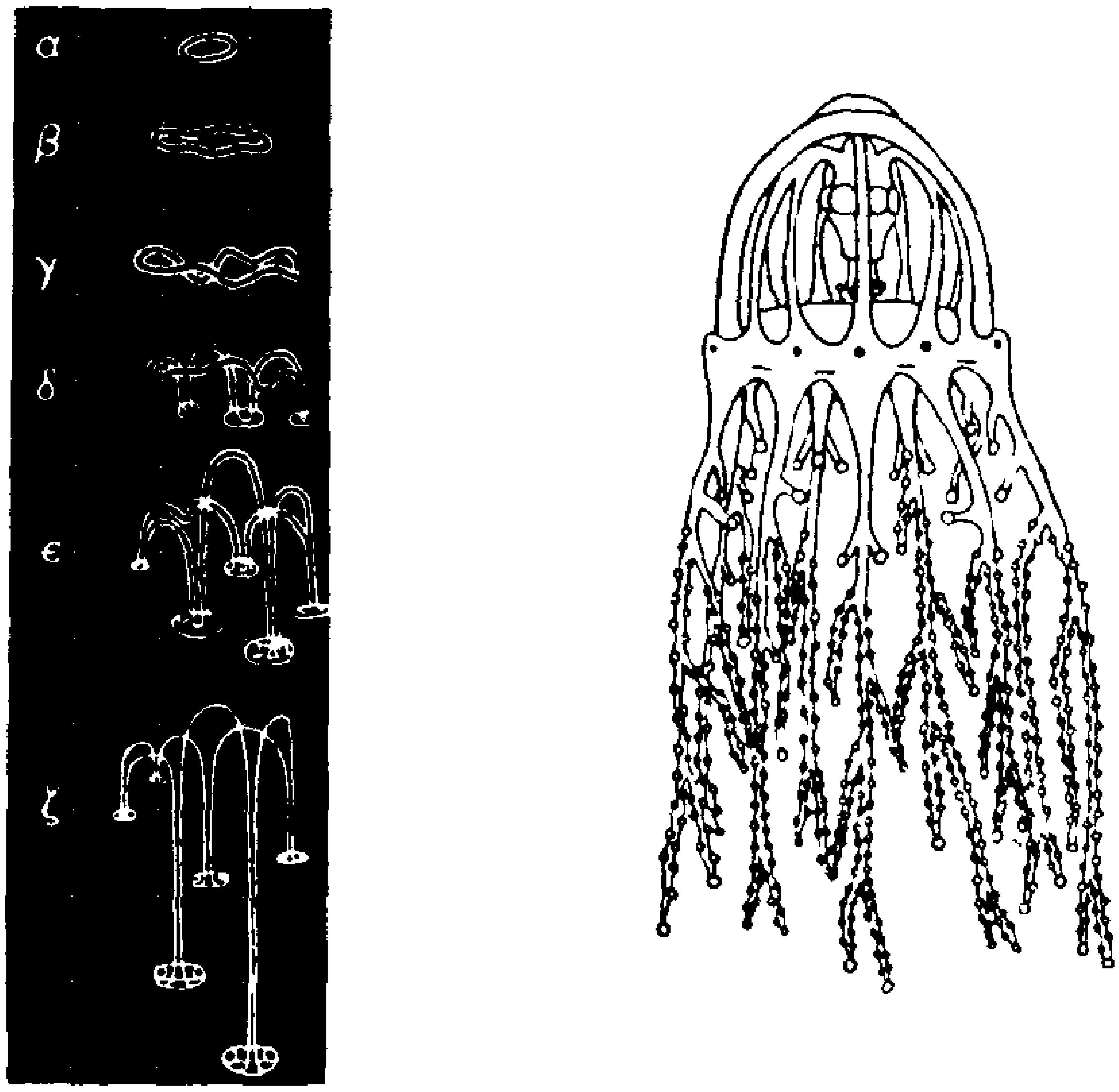


图8.5 下落的液滴

汤普森演示了墨水滴在水中下落时形成的（左图）和水母形成的（右图）悬线和悬柱。"一个极为奇妙的结果……是为了证明这些……液滴对于物理条件何等敏感。因为始终使用同一种明胶，只是把流体密度在第三位小数上作一些改变，我们就得到一串构形，从普通的悬滴到具有类似肋骨的结构。……"

未能预见遗传学的爆炸性发展。他的作品甚至在当年就显得太富于经典性和文学性，文词过于华丽，以致不像可信的科学作品。没有一位现代生物学家必须去读汤普森。然而不知为什么最伟大的生物学家们还是被他的书所吸引。梅达沃把它称为"在全部用英语记录的科学编年史中无与伦比的精美文献"。古尔德认为最好把自己对于大自然限制着事物形状的不断增长的意识，续写在汤普森的谱系上。除了汤普森以外，并

没有多少现代生物学家追求过活的生物体的无可否认的统一性。古尔德指出，“很少有人问，是否所有这些图形可以简化到单一的生成力系统；看来也很少有人感觉到这种统一性证明对于有机形体的科学会具有何等意义。”

这位通晓多种语言的经典作家、数学家和动物学家试图看到生命整体时，正值生物学硕果累累地转向把生物体简化为组成它们的功能部分的一些方法。简化论的胜利，在分子生物学方面引起的震惊最大，但在其他方面，从进化到医学，也莫不如此。如果不去理解细胞膜和核，最终是蛋白质、酶、染色体和成对的碱基，还有什么别的办法去理解细胞呢？当生物学最终弄清楚了额窦、网膜、神经、脑组织的内部工作机制时，再关心颅骨的形状就成为没有兴味的怪事了。汤普森是最后一位这样做的人。他也是最后一位多年来用精美的语言仔细讨论“原因”，特别是最终原因和有效或物理原因之间的区别的伟大生物学家。最终原因是基于目的或预谋的原因：轮子是圆的，因为具有这种形状才可能运输。物理原因是机械的：地球是圆的，因为引力把旋转流体拉成球体。其间的区别并不总是如此显而易见的。水杯是圆的，因为这是持拿或饮水的最方便形状。水杯是圆的，因为这是旋转制陶或吹玻璃所致的自然形状。

在科学中，物理原因基本上占主导。事实上，当天文学和物理学从宗教的阴影下生长出来时，曾蒙受了多少痛苦来摆脱那些预谋的、往前看的目的论论证——地球成为这个样子，是为了人类可以做它所做的事情。然而在生物学中，达尔文把目的论确立为思考原因的中心模式。生物世界可能并不满足上帝的预谋，但它遵从由自然选择形成的预谋。自然选择不是

作用于基因或胚胎，而是作用于最终产品。因此适应论者对于一种生物体形状或器官功能的解释总是要找原因，不是物理原因，而是最终原因。凡是在达尔文式的思维已成为习惯的科学领域，最终原因就存在下来。现代人类学家思索人吃人或宗教牺牲时，总是或对或错地只问它的目的何在。汤普森看到了这种情况。他请求生物学也记住物理原因，兼容机械论和目的论。他献身于解释那些作用于生命的数学和物理力量。由于适应论占了上风，这些解释被看成无关紧要的事。解释自然选择怎样把一片树叶塑造成如此有效的太阳能板的样子，成了丰富而有成果的课题。只是许久之后，一些科学家才开始重新对自然界的未被解释过的方面感到迷惑。从一切可设想的形状中，叶子只选取了寥寥数种；而且叶子的形状并不是由它的功能决定的。

汤普森所掌握的数学不足以证明他所想证明的一切。他所能做的最好的事情就是画图，例如，画出有关物种的颅骨，加上纵横交错的坐标线，表明简单的几何变换可以使其中一个变为另一个。对于简单的生物体，因为它们的形状会使人想起液体喷流、液滴飞溅和流的其他表现；所以他怀疑是物理原因例如引力和表面张力在起作用，但是它们又不能实现他所要求的成形工作。那末当利布沙伯开始做流体实验时，为什么要想到《论生长和形态》呢？

从动力系统角度展望生物学主流时，汤普森关于使生命成形的那些力的直觉最为接近实际。他把生命设想为“生活”，总是在运动，总是在响应节律，那是一些“深藏的生长节律”，他确信它们创造出普适形状。他认为自己所研究的不是事物的物质形式，而是它们的动力学——“用力、用能量的

操作所得出的解释”。他作为数学家足以明白列举全部形状证明不了任何东西。但他作为诗人却足以确信，无论是偶然还是目的都不能解释他多年注视大自然而汇集起来的各种形态的惊人普适性。物理定律应当解释这一切，这些定律目前仍以超乎人类理解的方式控制着力和生长。又是柏拉图。在特定的可见的物质形状后面，还应当有鬼魅似的形态作为不可见的模板。形态在运动中。

利布沙伯的精巧成就

利布沙伯选定液氦来做实验。液氦黏滞度极低，因而会在最轻微的推动下滚动。用中等黏度的流体如水或空气来做同样的实验，就必须用大得多的盒子。由于黏滞度低，利布沙伯使他的实验对加热相应地更加敏感。为了在几毫米宽的小腔中形成对流，只需在上下表面之间造成1/1000度的温差。这是盒子为何必须如此小的原因。在更大的盒子里，液氦有更多的空间来滚动，等价的运动将要求更小得多的加热。盒子每边长10倍，即像葡萄大小——体积比原来大1，000倍——时，里面只要有1/1,000,000度的温差就会开始对流。这样细微的温度变化很难控制。

在计划、设计和制作时期，利布沙伯和他的工程师尽一切努力消除任何可能引起混乱之处。事实上，他们努力消除所要研究的运动。从平流到湍流的流体运动，被认为是在空间中的运动。它的复杂性表现为空间复杂性，它的扰动和涡旋表现为空间混沌。但利布沙伯寻求的节律应当表现为随时间的变化。时间既是游戏场所又是测量码尺。他把空间压缩到几乎成

为一维的点。他也把流体实验先行者们用过的一种方法发挥到极限。大家都知道，封闭的流——盒子中的瑞利-贝纳德对流或圆筒中的库埃特-泰勒转动——的行为显著地比海洋或空气中的波动那样的开放流更好。在开放流中界面仍是自由的，这使复杂性倍增。

由于长方盒子中的对流产生热狗似的——在目前情形中是芝麻籽似的——流体卷，他仔细选择腔的尺寸，使得空间精确地足够容纳两个卷。液氦将在中心升起，上升，往左右分流，然后沿小腔的外壁下降。这是一种受抑制的几何。摇摆会受到限制。整齐的边线和精选的比例将消除任何外来涨落。利布沙伯把空间冻结，以便与时间嬉戏。

一旦实验开始，液氦就会在氮浴中的真空容器里的小腔中滚动，利布沙伯需要用某种方法来观看其中发生什么事。他在小腔的蓝宝石上表面中嵌入两个微细的温度探测器。它们的输出用笔绘仪连续记录下来。这样他就可以监视流体顶部两点的温度。另一位物理学家说，这个笔绘仪很敏感，很精巧，使利布沙伯成功地哄骗了自然界。

这个小巧的精密杰作用了两年时间才研究清楚。利布沙伯说，这正是他作画所需的画笔，不是太大也不过分复杂。最后他看到了一切事情。利布沙伯一小时一小时地、夜以继日地做着实验，发现了湍流发生时比他过去所曾想象过的更加复杂的行为模式。出现了完整的倍周期阶梯。利布沙伯把流体受热上升时的运动予以限制和纯化。过程随第一次分岔而开始，这时纯铜底板的加热已经足以克服流体保持静止的倾向，于是发生运动。在绝对温度之上几度时，只需要1/1,000度的温差就够了。底部的液体受热膨胀，足以变得比上面的冷液体

轻。要使热液体上升，冷液体必须下沉。为了使两种运动都能发生，液体立刻把自己组织成一对滚动圆柱。滚动达到恒定速度，系统进入平衡——一种运动平衡，热能恒定地转成运动，通过摩擦耗散回变为热，再通过冷顶板引出。

到此为止，利布沙伯是在重复流体力学中一个熟知的实验，这个实验熟得被人蔑视。他说，“这是经典物理，不幸的是，这意味着它是古老的，因而是没有趣味的。”它也正是洛伦兹用三个方程模拟过的那种流。但是，现实世界里的实验——现实的液体，机工切削出来的盒子，受到巴黎交通振动干扰的实验室——已经使数据采集工作比简单地用计算机产生数字麻烦得多。

像利布沙伯这样的实验家们，用简单的笔绘仪来记录嵌在顶面里的探测器所测出的温度。在第一次分岔后的平衡运动中，任何一点的温度都是或多或少保持恒定的，于是记录笔画出一条直线。加热越多，不稳定越大。在每一个流体卷中出现一个纽结，它恒定地前后运动。这种摇摆表现为温度变化，它在两个值之间上下。现在记录笔在纸上画出一条波纹线。

从一条连续变化并受实验噪声扰动的简单的温度曲线，已经不可能精确读出新分岔的时间或推断它们的性质。线上出现不规则的峰和谷，看起来几乎同股票市场的发热曲线一样随机。利布沙伯分析这类数据的办法是把它们变成频谱图，即揭示出隐藏在变化温度之中的主要频率。利用实验数据作成频谱图，就像把组成交响乐中复杂和音的声音频率画成图一样。在频谱曲线底部总有一条高低不平的模糊线——这是实验噪声。主要的音调表现为垂直尖峰：这音调越高，尖峰也

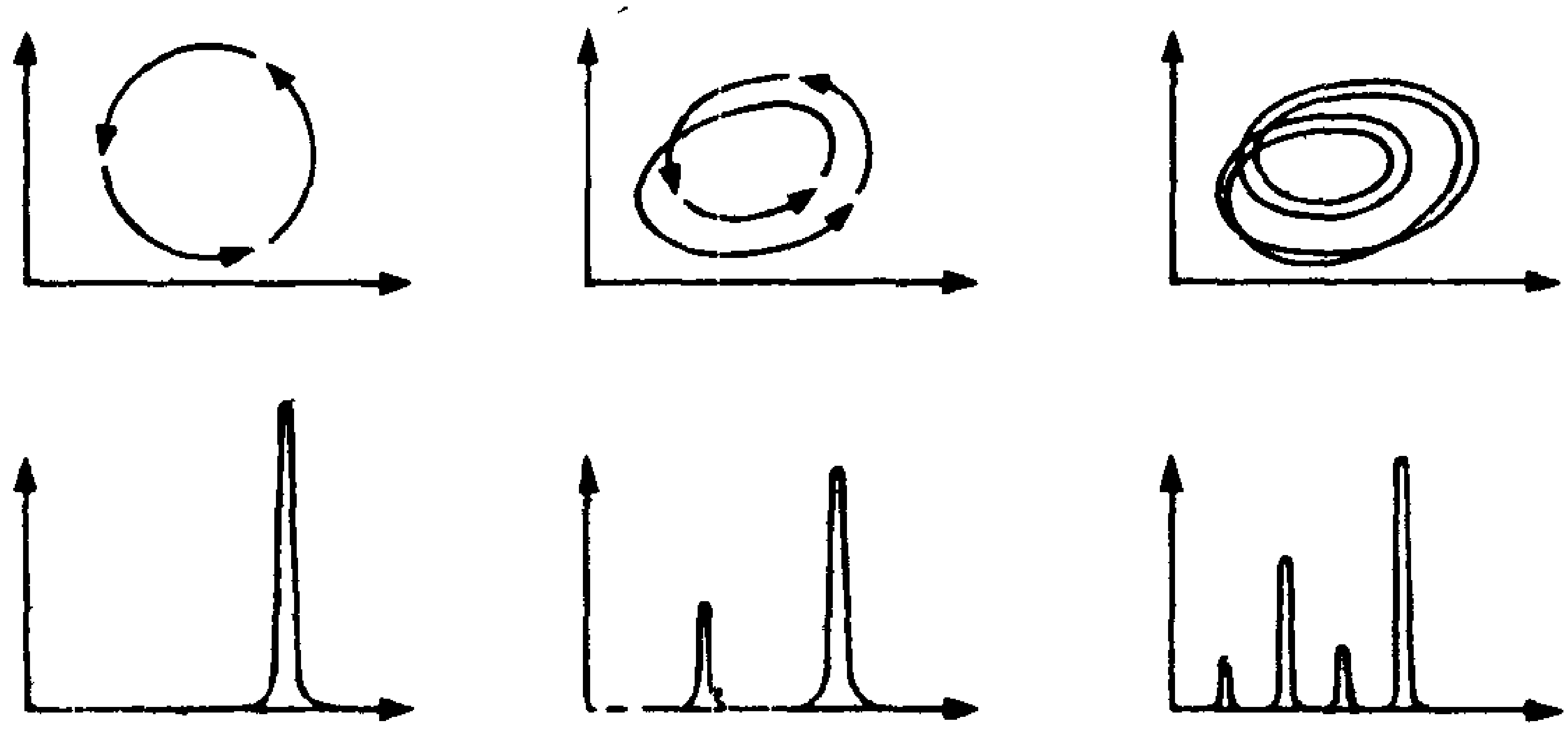


图8.6 观察分岔的两种方法

当像利布沙伯对流腔这样的实验产生恒定的振荡时，它的相空间图是一个闭环，它按规则的间隔自我重复（左上图）。测量数据中频率的实验家会在频谱图中看到对应于这个单一节律的强尖峰。在一次倍周期分岔之后，系统要转两圈才能准确重复自身（中图），现在实验者可在原频率一半（即两倍周期）处看到新的节律。新的倍周期在频谱图中增加新的尖峰。

越高。相似地，如果实验数据产生了一个主导频率——例如1秒钟达到一次峰值的节律，则这个频率将表现为频谱图上的尖峰。

在利布沙伯的实验里，出现的第一个波长大约对应于2秒周期。下一次分岔带来一点细微的变化。流体卷继续摇摆，测温计温度继续按某种主导的节奏上升和下降。但是在奇周期上温度开始比原来高一点，而在偶周期上低一点。事实上，最高温度一分为二，因而有两组不同的最高值和最低值。记录笔画出的线虽然还难以读出，但它在摇摆之上又加了一重摇摆

——一种变了形的摇摆。在频谱图上，这表现得更为清楚。老的频率仍然顽强地存在着，因为温度还是每2秒钟上升一次。但是，在准确位于老频率一半的地方，现在冒出来一个新频率，因为系统中发展出了每4秒钟重复一次的成分。随着继续发生分岔，可以辨认出一种奇特地一致的模式：新频率每次在老频率1/2处出现，于是图中先后按初始频率的1/4、1/8和1/16填满，有点像用长短不同的桩子打成的篱笆。

即使对于在杂乱数据中寻求隐藏形态的人，这个小腔的行为也必须经过几十几百次反复才能清楚地呈现出来。利布沙伯和他的工程师慢慢地把温度调高，使系统从一种平衡过渡到另一种，这时总可能发生一些怪事。有时会出现瞬态的频率，慢慢地从频谱图中滑移过去，然后消失。有时，尽管有干净的几何形状，还是会发展出三个卷而不是两个卷——说真的，他们怎能知道这小小的腔中在发生着什么事呢？

实验结合理论

如果利布沙伯当时已经得知费根鲍姆发现的普适性，他就会准确地知道应在何处寻求这些分岔，以及应当把它们叫做什么。到1979年，人数日多的一群数学家和有数学倾向的物理学家注意到费根鲍姆的新理论。可是那些熟悉实际物理系统中问题的广大科学家们还相信自己有充足的理由来拒绝对此作出评价。在梅和费根鲍姆的映象这样的一维系统里，复杂性是一回事，而在工程师可以建造的机械器件的二维、三维或四维系统里，它肯定是另一回事。这些系统要求认真的微分方程，而不只是简单的差分方程。看来还有另一个深渊把低

维系统与物理学家们认作潜在无穷维系统的流体系统隔开。即使是在利布沙伯精心构造的小腔里，实质上也有无穷多个流体粒子。每个粒子至少代表一种独立运动的潜在可能性。在某些情况下，任何一个粒子都可能成为新的扭曲或涡旋的所在地。

新泽西州贝尔实验室的霍恩堡说："没有人明白，为什么这样一个系统中事实上一定有关的土豆烧肉运动[①]却煮成了映象。"霍恩堡成为同时追踪新理论和新实验的很少几位物理学家之一。"费根鲍姆很可能梦想过这一点，可他一定没有这么说。他的工作是关于映象的。为什么物理学家要对映象发生兴趣呢？那不过是游戏而已。实际上，只要他们还在玩弄映象，那看来就距我们想明白的事情远得很。

"可是当在实验中看到时，那就真够刺激了。奇迹在于，在真正有意义的系统里，你可以借助自由度很少的模型来理解行为的细节。"

霍恩堡终于把理论家和实验家请到一起来了。1979年夏天他在阿斯本主持一个讨论会，利布沙伯在场。(4年前在同一类夏季讨论会上，费根鲍姆听斯梅尔讲到一个数——只是一个数，它似乎在数学家们观察某个方程中向混沌的转变时会跳出来。)当利布沙伯讲他的液氦实验时，霍恩堡作了笔记。在回家途中，霍恩堡碰巧在新墨西哥停了一下，见到了费根鲍姆。不久之后，费根鲍姆到巴黎访问利布沙伯。他们站在利布沙伯实验室散乱的零件和工具之中。利布沙伯骄傲地展示

① 指对流。——译者

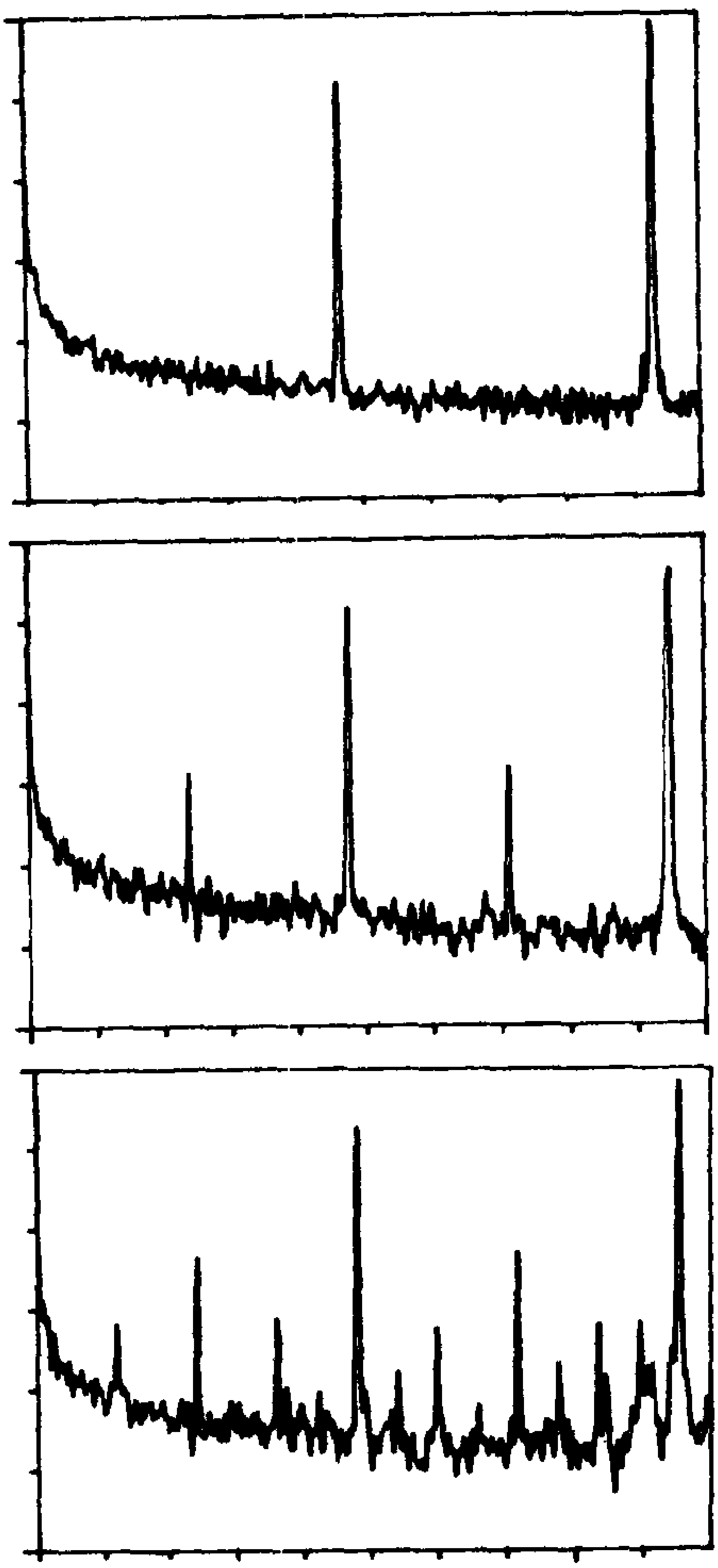


图8 7 现实世界里的数据证实了理论

利布沙伯的频谱图生动地显示出理论所预言的精确的倍周期模式。新频率的尖峰清楚地高于实验噪声。费根鲍姆的尺度理论不仅预言新频率在何时何地来到，而且还预言它们的强度，即它们的振幅。

了他的小腔，并让费根鲍姆解释他的最新理论。然后他们沿巴黎的大街散步，想喝杯最好的咖啡。利布沙伯后来回忆，当他见到这位如此年轻、在他看来如此活跃的理论家时是何等吃惊。

从一维到多维

从映象到流体的飞跃看来巨大得甚至那些直接对此事负责的人有时也觉得它像一场梦。大自然怎么能把如此的复杂性和如此的简单性拴到一起，这远非显而易见。郭勒卜说，“你只能把它当成一种奇迹，而不像理论与实验之间的通常联系。”几年之内，这奇迹一而再、再而三地在实验系统的广大园圃中出现：使用水和汞的更大的流体腔，电子振荡器，激光器，甚至于化学反应。理论家们改进了费根鲍姆的技术，发现了其他通向混沌的数学道路，即倍周期的表亲们：像阵发混沌和拟周期这样的模式。它们也在理论和实验中被证明是普适的。

实验家们的发现推动人们进入计算机实验的时代。物理学家们发现计算机也能产生同真正实验相同的定性图象，而且以快几百万倍的速度和更高的可靠性产生。对许多人来说，意大利摩德纳大学的佛朗西斯基尼所创立的流体模型比利布沙伯的结果更有说服力——这是产生吸引子和倍周期的一个包含5个微分方程的系统。佛朗西斯基尼一点也不知道费根鲍姆，但是他的复杂的多维模型产生了费根鲍姆在一维映象中发现过的同一批常数。1980年欧洲的一个研究组提出了令人信服的数学解释：耗散使由许多互相冲突的运动组成的复杂

系统“失血”，最终把多维行为化为一维。

在计算机之外，到流体实验里去发现奇怪吸引子，仍然是一个严重挑战。它使像斯文尼这样的实验家们一直忙到80年代。当实验家们最终获得成功时，新的计算机专家们往往把他们的结果贬低，因为在图形终端上已经有许多远为细致的图形涌现出来，而实验家所得到的结果不过是这些图形的粗糙的可以预见的反响而已。在计算机实验中，当产生成千上万乃至几百万数据点时，图形本身也或多或少地清晰起来。在实验室中和在现实世界中一样，有用的信息必须与噪声区分开来。在计算机实验中，数据像魔术酒杯中的酒一样地流出。在实验室里做实验时，你必须为每一滴而奋斗。

然而，单单依靠计算机实验，费根鲍姆和其他一些人的新理论是不会赢得如此广大的科学界的首肯的。为使非线性微分方程组数字化所需要的改变、妥协和近似太令人生疑。模拟要把现实劈成块，数目尽可能多，但终究太少。一个计算机模型好比一组由程序员任意选定的规则。而现实世界中的流体，即使在几乎剥光的毫米小腔里，仍然具有自然无序的全部自由而不受抑制的运动的不可否认的潜力。它具有引起意外的潜在可能性。

在计算机模拟的时代，从喷气发动机到心瓣的各种流动都在超级计算机上模拟时，人们很难记得自然界能如何容易地把实验家挫败。事实上，今天还没有一个计算机能完全地模拟即使像利布沙伯的液氦腔这样简单的系统。当一位好的物理学家查验模拟结果时，他一定会对现实性的哪些成分被漏掉、哪些潜在的意外被回避掉感到疑惑。利布沙伯喜欢说，他不愿乘坐一架模拟飞机——他会怀疑漏掉了些什么。而且

他会说，计算机模拟有助于建立直觉和改进计算，但不能产生真正的新发现。无论如何，这是实验家的信条。

利布沙伯的实验是纯洁无瑕的，他的科学目的是非常抽象的，以致仍然有物理学家认为他的工作更像哲学或数学而不像物理。而他又反过来认为在他的领域中占统治地位的标准仍然是简化论的，认为原子的性质是第一位的。“物理学家可能问我，这个原子怎样来到这里，停在那里？对表面的敏感性又如何？还有，你能写出系统的哈密尔顿函数吗？

“而如果我告诉他，我不关心这些，我的兴趣在于这个形状，形状的数学和演化，从这个形状到那个形状再到这个形状的分岔，那末他会告诉我，这不是物理，你干的是数学。甚至今天他还会这么说。那我能说什么呢？当然，我是在干数学。但这是与我们周围的世界有关的。这也是自然界嘛。”

他所发现的模式果真是抽象的。它们是数学性的。它们并不说明液氦或铜的性质，或者原子在绝对零度附近的行为。但它们是利布沙伯的神秘的先驱者们梦寐以求的那些模式。它们使一片实验领域合法化，许多科学家，从化学家到电机工程师，很快都要成为这一领域的探索者，以便找出运动的新元素。有了这些模式，将看到他第一次成功地把温度升高得足以隔离开第一次、下一次和再下一次倍周期。根据新理论，这些分岔应当产生一个具有准确尺度性质的几何 而这就恰好是利布沙伯所看到的。在这一瞬间，费根鲍姆的普适常数从数学理想变成了物理现实，可以测量，可以再生。许久以后他还记得那种感觉，那种不安地目睹一次分岔跟着另一次，然后才意识到这是充满结构的无穷阶梯的情景。正像他过去所说过的那样，这是逗乐的。

9 混沌的形象

当混沌把一切力量吸引进去以形
成一片单叶时，另外还有什么。

——艾肯

复平面

巴恩斯利是1979年在科西嘉岛开会时遇见费根鲍姆的。就是在这一次，巴恩斯利这位牛津大学教育出来的数学家听说了普适性、倍周期和无穷的分岔阶梯。他想，这是一个好思想，正是科学家们都要赶来为自己切一块的那种思想。至于他自己，巴恩斯利觉得他看见了别人都没有注意到的一块。

这些2，4，8，16周期，这些费根鲍姆序列，是从哪里来的呢？它们是从某种数学真空之中靠变魔术出现的，还是它们提示了某些更深刻的东西的踪影。巴恩斯利的直觉是，它们必然是某种迄今隐而不露的非同寻常的分形对象的一部

分。

他的想法有个来龙去脉，那就是被称为复平面的数值领域。在复平面中，所有从负无穷大到正无穷大的数，即所有实数，都位于从遥远西方伸向遥远东方的一条直线上，在中心点上是零。但这条线只是一条赤道，这个世界还向南北延伸到无穷。每个数由两个部分组成："实"部，对应于东西向的经度；"虚"部，对应于南北向的纬度。按照约定，这些复数的写法是：$2+3i$，i 表示虚部。这两部分为每个数在这二维平面中给出唯一的地址。因此最初由实数组成的那条线只是一个特殊情形，即虚部为零的数。在复平面中只看实数，即只看赤道上的点，就是把视界限制于形状的偶然截面。当从二维看时，这些形体可能透露一些其他秘密。这就是巴恩斯利的猜测。

"实"和"虚"这些名字的来源是，最初曾以为普通的数比这个新的混合数更实在一些，但现在人们承认这些名字是相当任意的。这两种数正像任何其他数一样实也一样虚。历史地说，发明虚数是为了填补下述问题产生的概念真空：负数的平方根是什么？根据约定，-1 的平方根是 i，-4 的平方根是 $2i$，如此等等。只要前进一小步，就可以意识到实数和虚数的组合导致多项式方程的新的计算。复数可以加、乘、平均、分成因子和积分。每种对实数的计算都可同样用于复数。当巴恩斯利开始把费根鲍姆的函数转换到复平面时，他看到一族奇妙的形状开始浮现出轮廓，这些形状看来与引起实验物理学家兴趣的动力学思想有关，但作为数学构造也是令人吃惊的。

他明白这些周期毕竟不是从稀薄空气里冒出来的。它们

是从复平面掉到实线上的，而在复平面中，你可以看到有各种周期、各种等级的星座。总有2周期、3周期和4周期，它们在视野外飘动直至来到实线上。巴恩斯利急忙从科西嘉岛回到自己在佐治亚州理工学院的办公室，并写了一篇论文。他把文章送给《数学物理通讯》去发表。那编辑恰好是茹厄勒，而他带来的是坏消息：巴恩斯利无意中重新发现了一位法国数学家已经埋没了50年的老结果。他回想说，“茹厄勒把它像一个烫土豆那样给我掷回来，并且说，‘巴恩斯利，你说的是尤利亚集。’”

不过茹厄勒加了一句劝告：“你和曼德勃罗联系一下。”

牛顿法中的意外

3年前，一位喜欢穿时式显眼衬衫的美国数学家哈伯德，正在法国奥尔赛给大学一年级生教初等微积分。在他讲授的标准论题中包括牛顿法，即靠逐次近似求解方程的经典方法。然而，哈伯德自己对于标准论题已经有点厌倦，于是有一次他决定换个办法来教牛顿法，好迫使学生们多想点问题。

牛顿法很古老，当牛顿发明它时已经老了。古希腊人曾使用它的一个变种来求平方根。此法由一个猜测开始。这个猜测导致一个更好的猜测，这个迭代过程趋向一个答案，就像动力系统趋向定态一样。这个过程很快，精确的十进制位数通常每一步翻一番。当然，今天求平方根遵从更为解析的方法，正像二次多项式方程——变量不超过二次幂的方程——的所有根一样。不过牛顿法同样适用于不能直接求解的高次多项式方程。此法在一大类计算机算法中也用得很漂亮，

因为迭代始终是计算机的长处。牛顿法的一个小小难处，在于方程通常有不止一个解，特别是把复数解包括进来之后。该法究竟找到哪个根，这与初始猜测有关。在实践中，学生们认为这根本不是问题。人们通常完全明白该从何处开始，如果猜测看来收敛向一个错误的解，那就从别处重新开始。

人们可以提问：准确说牛顿法是沿着怎样的途径在复平面上趋向二次多项式方程的一个根的？从几何上想，可能会回答说，此法容易找出两个根中哪一个离初始猜测较近。这也就是在奥尔赛有一天学生们提出这个问题时哈伯德所作的回答。

哈伯德那天满怀信心地说："但是对于三次方程，情形看来复杂一些。我要想一想，下星期再告诉你们。"

他当时还是假定，困难的是教会学生如何作迭代计算，而作初始猜测将是容易的。不过，他想得越多，知道得就越少——怎样才算构成一个聪明的猜测，或者就此而言，牛顿法究竟是在做什么。明显的几何猜测就是把平面分成三个相等的扇形，每个扇形中间有一个根。但哈伯德发现这不行。在边界附近发生一些怪事。更有甚者，哈伯德发现自己并不是第一个碰上这个意外难题的数学家。早在 1879 年，凯莱就尝试过从可以处理的二次方程转向惊人地不能处理的三次方程。但是，一个世纪之后的哈伯德手边已经有了凯莱所缺少的一种工具。

哈伯德是那种严格的数学家，重视证明而看不起猜测、近似和基于直觉的半真理。他是那种数学家，在洛伦兹的吸引子进入文献 20 年之后仍然坚持说，没有人真正知道这些方程究竟会不会导致奇怪吸引子。那只是一个未证明的猜想。他

说，大家熟悉的双螺旋并不是证明，而只是一种迹象，一种计算机画出来的东西。

现在，哈伯德不由自主地开始用计算机去做那正统方法没有做到的事。计算机不会证明什么。但至少它可以揭开真理的一层面纱，以便数学家知道他应当尝试去证明什么。于是哈伯德开始做实验。他把牛顿法本身看作一个问题，而不是一个解问题的方法。哈伯德考察三次多项式的最简单的例子，即方程 $x^3-1=0$。也就是说，求出 1 的立方根。在实数范围内，当然只有一个平凡解：1。但这个多项式还有两个复数解：$-1/2+i\sqrt{3}/2$ 和 $-1/2-i\sqrt{3}/2$。在复平面中画出来之后，这三个根给出一个等边三角形，一个顶点在 3 点钟，一个在 7 点钟，一个在 11 点钟。给定任何一个复数作为初值，问题就在于看看牛顿法将导致三个解中的哪一个。牛顿法好像是个动力系统，而三个解是三个吸引子。或者说，复平面好像是一个光滑曲面，它向三个深渊倾陷进去。从平面上任何地方开始运动的一块卵石，应当滚进一个深渊。但，哪一个？

哈伯德开始从构成平面的无穷多个点采样。他让计算机逐点扫描，计算牛顿法对于每一点的流，并用颜色标记结果。导致一个解的起始点全画成蓝色。导致第二个解的点是红色的，导致第三个解的点是绿色的。在最粗略的近似下，他发现牛顿法的动力学果然把平面分成三个扇形。一般地，在一个特定解附近的点很快趋向这个解。但是系统的计算机探索揭示了复杂的内部组织，这是只能东算一个点、西算一个点的前辈数学家们所不可能看到的。有些初始猜测很快趋近一个根，而另一些猜测则在最后趋近一个解之前似乎随机地跳

来跳去。有时一个点看来会掉进永远重复的循环，一个周期环，而不趋近任何一个解。

当哈伯德用计算机越来越细致地探索空间时，他和学生们被那开始出现的图形弄得迷惑不解。例如，在红色和蓝色山谷之间不是一条整齐的山脊，而是像宝石那样串在一起的绿斑。仿佛一块被卷入两个邻近山谷的互相冲突的较量中的卵石，最后却走向那最远的第三个山谷中去。两种颜色之间的边界永远不能清楚地形成。当仔细观看时，原来在一块绿斑和蓝谷之间的线上还有一块一块的红色。如此继续下去，这个边界最终向哈伯德展示的特别性质甚至会使熟悉曼德勃罗的怪异分形的人感到迷惑不解：没有一个点是两种颜色的边界。只要两种颜色靠近一些，第三种颜色就会挤进来夹到中间，这又引起一系列新的自相似的入侵。每个边界点都要隔开三种颜色的区域，这是不可思议的。

哈伯德着手研究这些复杂形状和它们的数学涵义。他和同事们的工作很快成为对动力系统问题的一条新的进攻路线。他意识到，牛顿法所导致的映象只是反映着现实世界中力的行为的整个一族未被探索过的图形中的一个。巴恩斯利观察的是这一族中的另一些成员。这两个人很快得知，曼德勃罗正在发现所有这些形状的老爷爷。

曼德勃罗集：嫩芽和卷须

曼德勃罗集是数学中最复杂的对象，它的赞赏者们喜欢这么说。用无限的时间也不足以观察它的全貌，它那饰以多刺荆棘的圆盘，它那弯曲外绕的螺线和细丝，上面挂着鳞

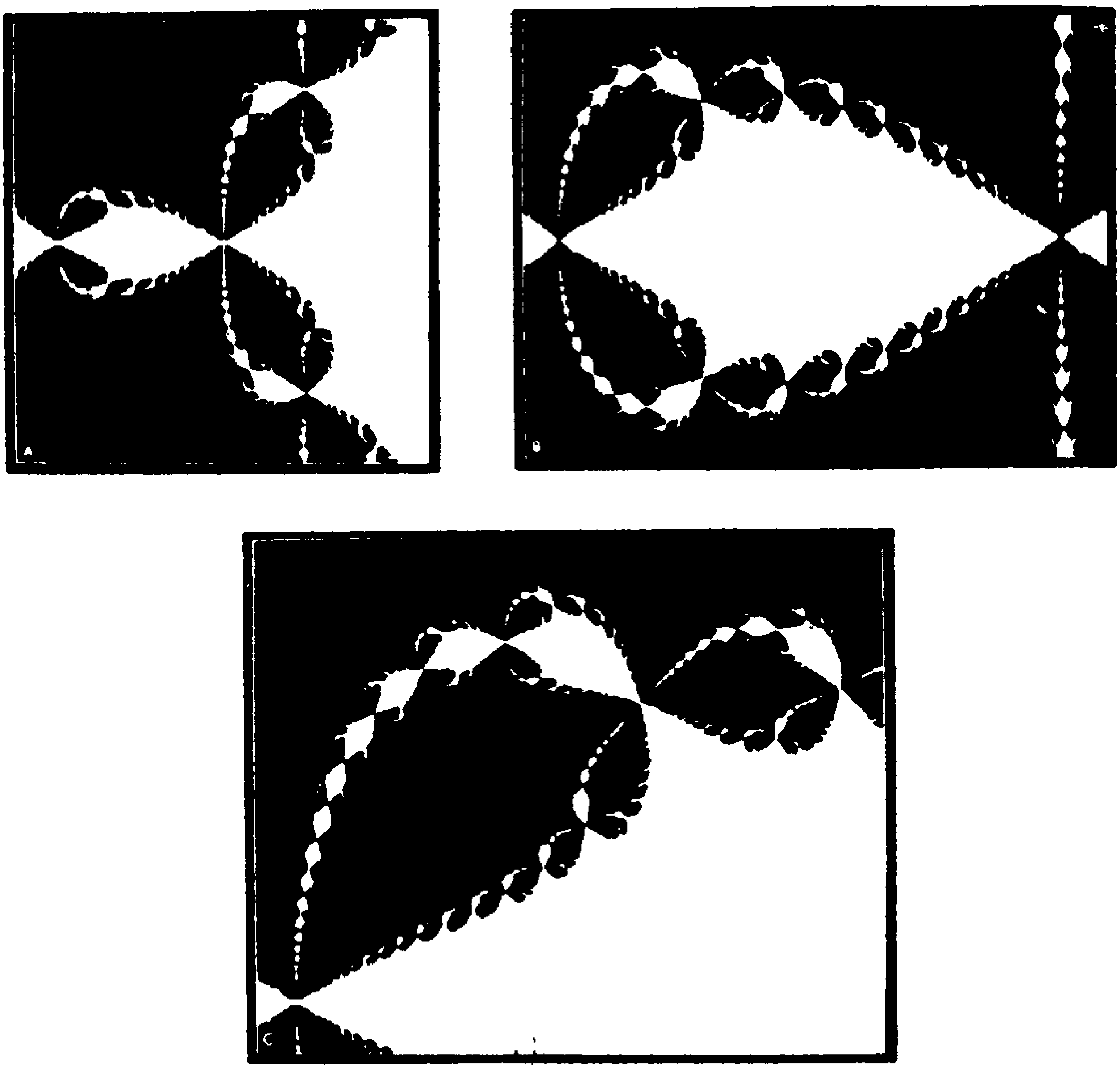


图9.1　无穷复杂的边界

当把馅饼切成三块时，它们在一个单独的点相遇，而任何两块之间的边界都是简单的。然而许多抽象数学过程和现实世界物理过程会创造出几乎不能想象地复杂的边界。

上图表示用牛顿法求－1的立方根时，平面被分成三个相等的区域，其中之一画成白色。所有的白点被“吸引”到位于最大白色区域中的一个根，所有的黑点被吸引到另外两个根中的一个。边界具有一种特别性质，即上面每个点都隔开所有三个区域。如插图所示，放大的局部图显示出一种分形结构，在越来越小的尺度上重复同一基本图形。

茎状的微细颗粒，无穷尽的杂色斑驳，好像是上帝私人葡萄树上的累累果实。通过可调节的计算机彩色屏幕的窗口考察时，曼德勃罗集看来比其他分形还要分形，它跨越尺度的复杂情况是如此丰富。如果想列举其中各种图形，或者用数字描述这个集合的轮廓，将需要无穷多的信息。然而这里有一件怪事：为了把关于这个集合的完整描述通过传输线送出去，只需要几十个字符的码。一段简练的计算机程序就包含了足够的信息来再现全部集合。最早理解这个集合如何把复杂性和简单性混合在一起的人们无不感到意外，甚至曼德勃罗也是如此。曼德勃罗集变成混沌的一种国际标志，它出现在会议小册子和工程季刊的华丽封面上，并成为1985年和1986年在世界上巡回展览的计算机艺术品的中心。很容易从这些图形中感受它的美丽；但掌握它对数学的意义要更难些，不过数学家们慢慢开始理解它。

在复平面中的迭代过程可以产生许多分形形状，但曼德勃罗集只有一个。当曼德勃罗试图推广一类称做尤利亚集的形状时，它开始模模糊糊、鬼影神踪似地出现。尤利亚集是第一次世界大战时期法国数学家尤利亚和法图发明和研究过的，他们艰苦劳动时，还不具备只有计算机才能产生的这些图形。曼德勃罗20岁时曾经见过他们画的一些朴素图形，读过当时已属罕见的文章。尤利亚集及其大量变种，恰恰就是迷住了巴恩斯利的那些对象。有些尤利亚集像许多圆圈，它们在许多处被挤捏变形，以致成为分形结构。另一些分裂成许多区域，还有一些乃是不连通的尘埃。但是无论是语言还是欧几里得几何的概念都不能描述它们。法国数学家多阿第说过，“你可以得出不可思议之多的尤利亚集：有些是变肥的

浮云，另一些是瘦削的棘丛，还有的像焰火熄灭后仍在空中飘动的火星。再有一种似像兔子，而许多则具有海马式的尾巴。”

1979年曼德勃罗发现他能在复平面上创造一种形象，它可以作为尤利亚集的目录，指出每一种尤利亚集。当时他正在探索复杂过程的迭代，一些含有平方根、正弦和余弦的函数。即使已经把“简单性孕育复杂性”这一命题确立为自己智力活动的中心，曼德勃罗也并未立即理解，那些在国际商用机器公司和哈佛大学的计算机屏幕视野之外翱翔的对象是多么非同寻常。他要求程序员们显示出更多细节，他们不得不为分配已经紧张的存储而冒汗。这就是在配有原始黑白显示管的一台国际商用机器公司主机上计算新的内插点。更糟糕的是，程序员们必须时常警惕不落入计算机研制过程中常有的陷阱，即完全由于机器捣乱而出现的假象。往往程序变个写法假象又消失了。

那时，曼德勃罗注意到一个特别容易编程序的简单映象。只需要把反馈环重复很少几次，一些盘形的轮廓就在那相当粗的网格上显现出来。用铅笔简单算几行，就可以证明这些盘形在数学上是真实的，而不是计算中出现的怪事。在主盘形的左右两侧，有更多的形状似乎隐约欲出。他后来说，当时他在思想里已经看到更多：一种形状的阶梯，原子上又抽出更小的原子直至无穷。而在这集合与实线相交的地方，相继的小盘尺寸按几何规则变小：动力学专家们认出这是费根鲍姆的分岔序列。

这鼓舞了他继续往前算，把粗糙的原始图形精细化。他很快发现，有些脏东西乱糟糟地黏上盘形的边缘，也飘浮在

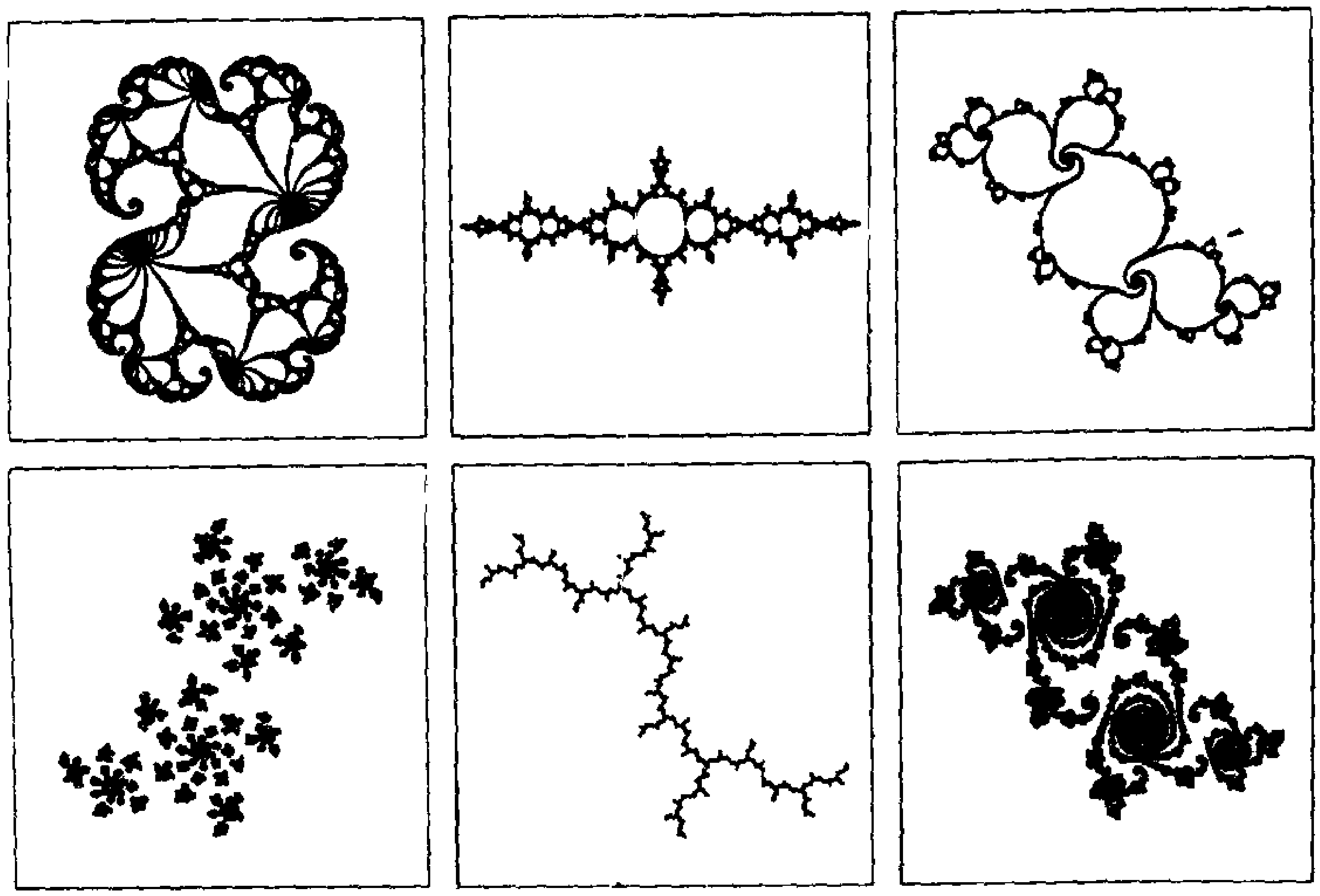
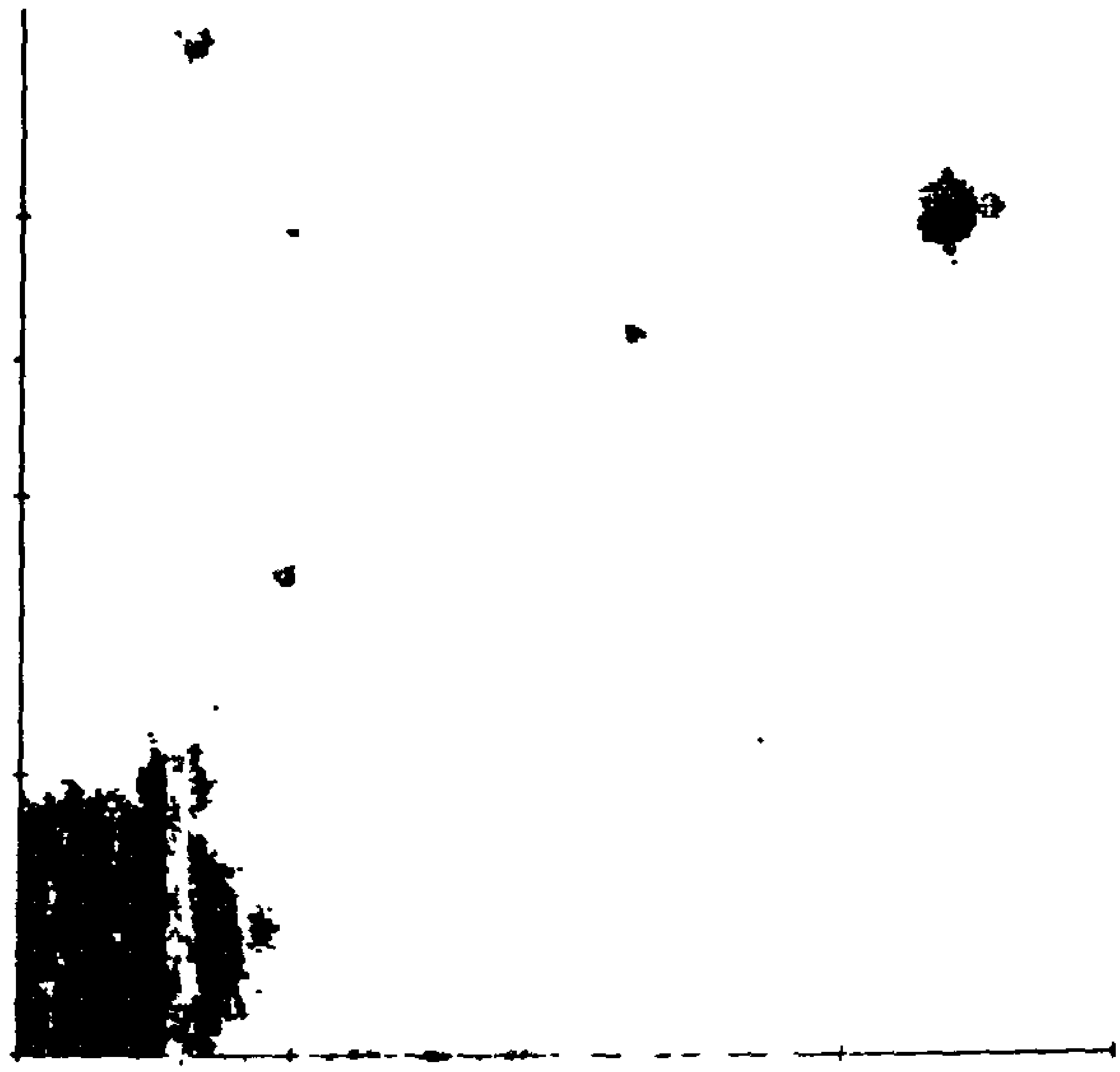


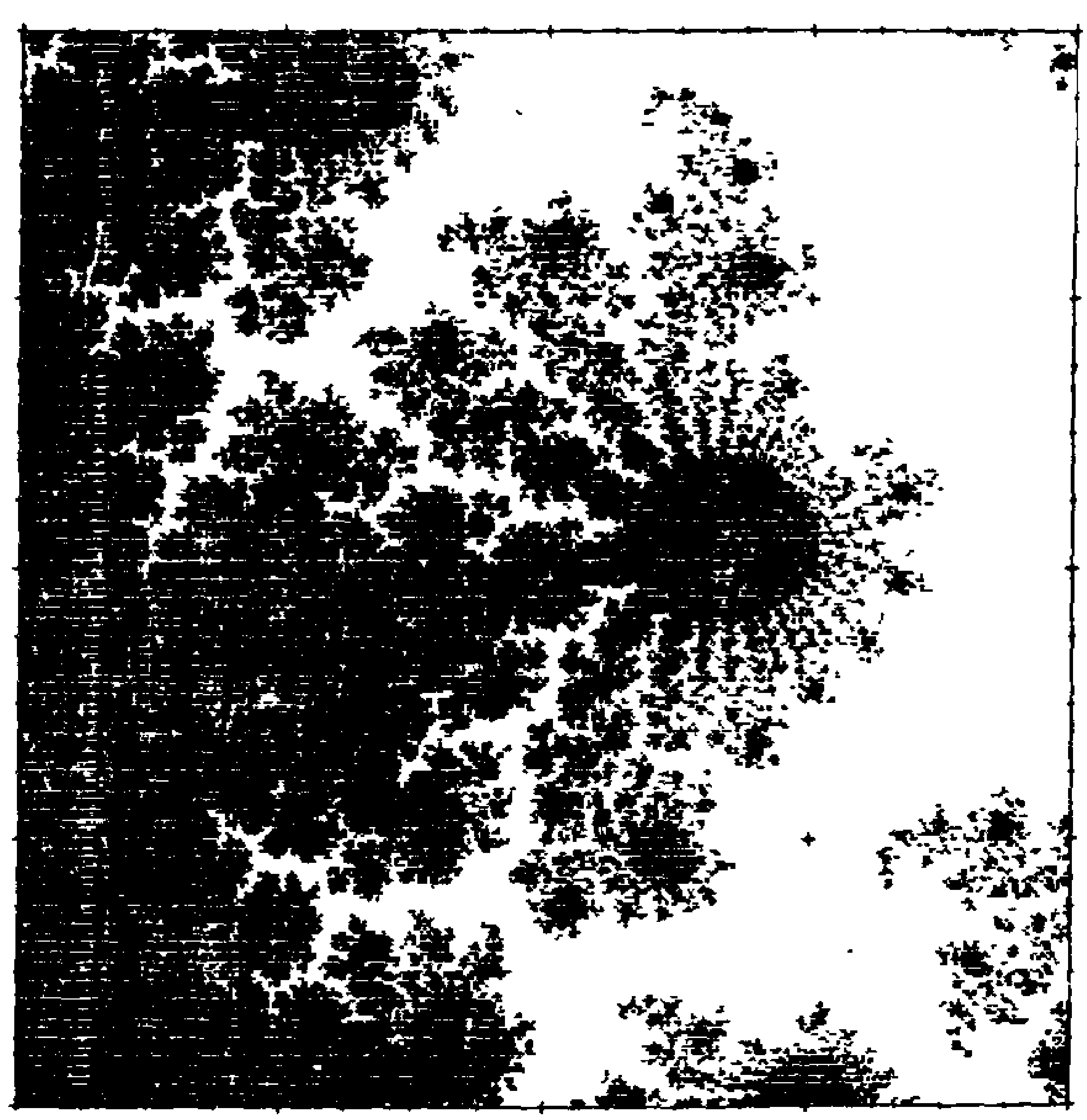
图9 2 尤利亚集示例

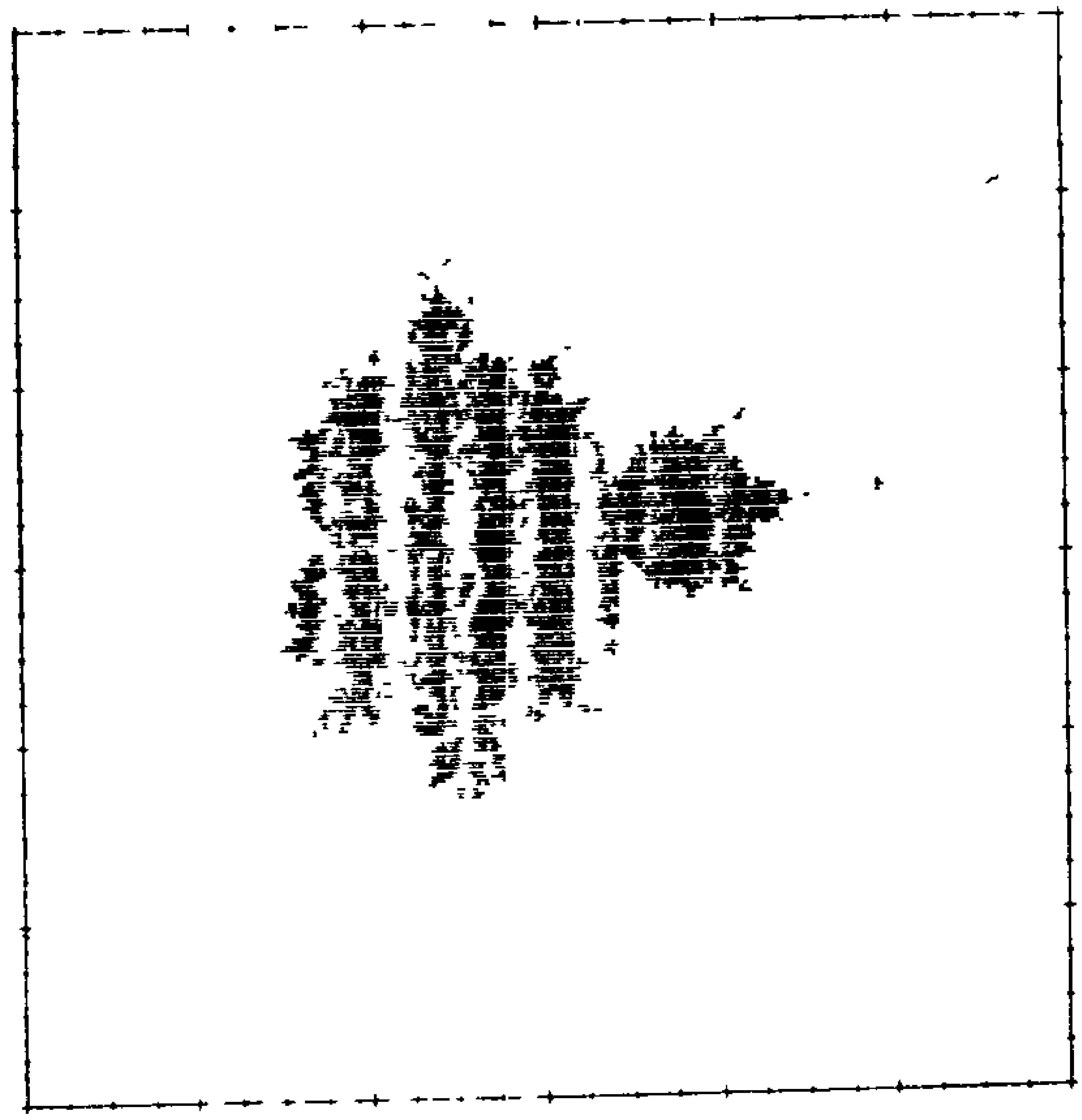
附近空间中。当他尝试着越来越细致地算下去时，他忽然感到好运完蛋了。图形不是变得更清楚，而是变得更杂乱。他赶回国际商用机器公司的维切斯特县研究中心，去运用哈佛大学不能比拟的专有尺度计算能力。他吃惊地看到，这些越来越多的杂乱是某种真实事物的迹象。嫩芽和卷须从主岛慢吞吞地转出去。曼德勃罗看到一条形似光滑的边界分解成一串螺线，就像海马的尾巴一样。无理性丰富了有理性。

曼德勃罗集是由大量点堆积成的。复平面中的每个点，即每个复数，或在集合之中，或在集合之外。定义这集合的一种办法，就是用某种简单的算术迭代检验每一个点。为了检验一个点，先取那个复数：平方之后加上原数；把结果平方再加上原数；再把结果平方——如此一遍遍地做下去。如果



曼德勃罗集的出现。在曼德勃罗最早的粗糙的计算机印出中，出现了一个模糊的结构，随着计算质量的改善，细节越来越清楚。那像小虫子似的、漂浮的微细颗粒是孤立的岛屿吗？或者，它们与主体之间有观察不到的细丝相连？不可能说清楚。







总结果趋向无穷大，则这点不在曼德勃罗集中。如果总结果保持有限（它可能陷入某个重复的循环，也可能混沌地乱走），则这点在曼德勃罗集中。

这种无限重复一个过程并问结果是否无限的做法，有些像日常世界中的反馈过程。设想在一间教室里安装话筒、扩音器和喇叭。这时要防止声音反馈的尖叫。如果足够强的噪声进入话筒，从喇叭里出来的放大了的声音将越来越响地不断反馈回话筒中。另一方面，如果声音足够小，它会消失得无影无踪。为了用数字来模拟这个反馈过程，可以取一个初始值，乘上它自己，再把结果乘上它自己，如此继续下去。你会发现大数很快导致无穷大：10，100，10,000，……。但是小数导致零：1/2，1/4，1/16，……。为了得到几何图象，可把那些代入这个方程后不跑到无穷大的点都搜集起来。考察一条直线上从零往上的点。如果一个点产生反馈的尖叫，把它涂成白色。否则涂成黑色。用不了多久，就会得到一个从0到1的黑线构成的图形。

对于一维过程，实际上并不需要做实验。很容易看出，大于1的数导致无穷大，而其余的数则否。但要在二维复平面内确定一个由迭代过程定义的形状，知道方程通常是不够的。与几何学中的传统形状即圆、椭圆和抛物线不同，曼德勃罗集没有捷径可循。为了看看一个特定的方程导致什么图形，唯一的办法是试错法，正是这种试错风格使这片新领土的探索者在精神上更接近麦哲伦而不是欧几里得。

用这种方式把形的世界与数的世界联系起来，代表了与过去的一次决裂。新几何学总是由于某人改变了基本规则而开始。一位几何学家说，假设空间可以是弯曲的而不是平直

的，结果是一种古怪的弯曲的对欧几里得的模仿，而这恰好提供了广义相对论的正确框架。假设空间可以有四维、五维或六维。假设维数可以是分数。假设形状可以扭曲、拉伸、打结。或者如目前这样，假设形状不是由一次求解一个方程来定义，而是通过在反馈环中进行迭代来定义。

尤利亚、法图、哈伯德、巴恩斯利、曼德勃罗这些数学家改变了造几何形状的规则。每一位学过高中几何或者曾在地图上用两个坐标找过一个点的人，都熟悉欧几里得和笛卡儿把方程变成曲线的方法。标准的几何学要求取一个方程，找出所有满足方程的数的集合。像 $x^2+y^2=1$ 这个方程的解确定一个形状，具体说，一个圆。其他简单方程产生另一些图形，即椭圆、抛物线和双曲线这些圆锥曲线，或者由微分方程在相空间里产生的更复杂的形状。但是当几何学家迭代一个方程而不是求解它时，这个方程就变成了过程而不是描述，动态而不是静态。一个数进入方程，另一个数出来；新数再进去，如此继续下去，这些点在平面上跳来跳去。所画出来的点并不满足一定的方程，而是产生某一种行为。一种行为可能是定态。另一种行为可能是收敛到状态的周期重复。再一种行为可能是失控而跑向无穷大。

在出现计算机之前，甚至像尤利亚和法图这些懂得这种新造形法的可能性的人，也没有办法来使它成为科学。随着计算机的出现，试错几何学才成为可能。哈伯德研究牛顿法时，就是计算逐点的行为，曼德勃罗最初也是用同样的方法看他的集合的，即用计算机逐点扫过平面。当然不是所有的点。时间和计算机都是有限的，这类计算只能使用网格点。更细的网格给出更分明的图象，代价是计算更长。曼德勃罗集

的计算是简单的，因为过程本身如此简单：在复平面内对映射 $Z\to Z^2+C$ 进行迭代。取一个数，乘上自己，再加上最初的数。

当哈伯德对自己用计算机探索图形的新风格越来越感到舒服时，他也开始采用一种新的数学风格，即把复分析法这一数学领域空前地用于动力系统。他感到，所有的做法都殊途同归了。数学中的独立分支都走到交叉路口来了。他知道只看到曼德勃罗集是不够的：在做完之前，他希望能理解它，事实上他终于宣称他理解它了。

如果边界线只是在曼德勃罗的本世纪初的怪物意义上的分形，那末一张图形应当或多或少与上一张相像。不同尺度的自相似原理使人们有可能预言电子显微镜在下一级放大时应看到什么。相反，每次更深地冲进曼德勃罗集都带来新的意外。曼德勃罗开始担心自己对“分形”的定义过分狭窄；他肯定愿意把这个词用于这个新的对象。当足够放大之后，这个集合也确实包含着自己的一些粗略副本，像小虫一样的对象飘浮在主体之外。但更进一步放大表明；这些小虫没有两个准确匹配。总要出现新型海马，出现温室中弯弯曲曲的新种。事实上，无论放大多少倍，集合中没有任何一部分与其他部分完全相像。

然而，这些飘浮的微细颗粒的发现立刻提出了一个问题。曼德勃罗集是否连通，即整片大陆是否与伸得很远的半岛相连？或许它是尘埃，主体之外由细小的岛屿包围着？这远非显然。尤利亚集的经验没有指导意义，因为尤利亚集两种情况都有，有些是整个的形状，有些是尘埃。分形尘埃具有独特的性质，即没有两片是“在一起”的，因为每一片与其他

各片之间都有空间隔开，然而也没有任何一片是“单独”的，因为只要找到一片，在附近任意近的地方就总可以找到许多其他片。当曼德勃罗考察他的图象时，就意识到计算机实验不能解决这个基本问题。他更敏锐地注视在主体附近飞翔的许多斑点。某些斑点消失了，但另一些清楚地长成几乎是原件复制品的样子。它们看来是独立的，但也可能是相连的，只是连线细到仍然可以避开计算机的网点布置。

多阿第和哈伯德采用了一系列卓越的新数学来证明，每一个飘浮的微细颗粒果然是挂在一根细丝上，这细丝又把它连到所有其余部分上，这是由主集合的纤小露头喷出来的精致的蛛网，用曼德勃罗的说法是“魔鬼的聚合物”。这两位数学家还证明，任何一个片段，不论在哪里，不论有多小，当它被计算机显微镜放大后都会揭示出新的微细颗粒，每一粒都像是原来的主集合，但又不尽相同。每一个新的微细颗粒都被自己的螺线和火焰似的投影包围着，而它们又不可避免地揭示出更细小的颗粒，总是相像而又不完全相同，满足着某种无穷多变的指令。这是一种微型化的奇迹，其中每一个新的细节都必然自成一个新宇宙，既是分散的，又是完整的。

艺术和商业同科学会面

派特根说，“每一件作品都充分运用了几何学的直线方法。”他是在谈论现代艺术。“例如，艾伯斯的作品尝试着去发现颜色的关系，实质上这是不同颜色的方块彼此覆盖着。这种东西曾经很流行。不过现在看来时髦已经过去。人们不再喜欢它。在德国，他们按照方盒子建筑的风格盖了大

片住宅区，但人们搬出来，不喜欢在那里面住。在我看来，正是现在社会上有深刻理由不喜欢我们关于自然界的概念的某些方面。”派特根一直在帮助一位来访者选购曼德勃罗集、尤利亚集以及其他一些复迭代过程的局部放大图，全是精美的彩图。在他那位于加州的小办公室里，他提供幻灯片，大张透明片，甚至曼德勃罗集挂历。“我们所具有的深切热情与这种对自然界的不同看法有关。什么是自然对象的真实方面？比如说一棵树，什么是重要的？是直线，还是分形对象？”同时在康奈尔大学，哈伯德也正在与商业需求斗争。几百封信寄到数学系来索取曼德勃罗集的图片，他意识到必须准备样品和价目表了。几十种图形已经算好并存储在他的计算机里面，在那些记得技术细节的研究生帮助下，随时可以显示出来。然而，具有最细分辨率和最生动彩色的最壮观的图片，来自两位德国人派特根和里希特以及他们在不来梅大学的一组科学家，他们受到当地一家银行的热情资助。

派特根和里希特，一位数学家和一位物理学家，都把自己的事业转向了曼德勃罗集。对他们来说，这里体现了众多想法：一种现代艺术哲学，实验在数学中新作用的一种明证，一种向广大公众介绍复杂系统的方法。他们出版漂亮的目录和书籍，带着他们的计算机图形在世界上作巡回展览。里希特是从物理学经过化学和生物化学来到复杂系统的，他研究的是生物体内的振荡。在一系列关于免疫系统以及糖酵解转换成能量这类现象的论文中，他发现习惯上当作静态的一些过程，实际上是振荡控制下的动力学过程，它的重要原因在于活的生物系统不容易打开作实时观察。里希特在自己的窗台上钉了一架润滑得很好的双摆，这是他的“宝贝动力系

统”，是大学金工车间专为他制作的。他时而让它作混沌的无节律的转动，以便也可在计算机上模仿这种运动。对于初始条件的依赖性敏感得1英里外的单个雨点的引力拉动也会使运动在五六十转（即大约两分钟）之内混起来。这个双摆的相空间的彩色图片显示了周期性和混沌交错的区域，他也用同样的图象技术来显示例如金属中的理想磁化区域，并研究曼德勃罗集。

对他的同事派特根来说，研究复杂性提供了在科学中建立新方向的机会，而不仅是解决问题。派特根说，“在这样崭新的领域里，你可以今天开始想问题，而如果你是个好科学家，那可能在几天、一周或一个月内就得到有趣的解。”这门学科还没有确定的结构。

“在结构确定的学科中，人们清楚什么已知什么未知，什么事情人们已经劳而无功地尝试过了。你必须去研究一个成其为问题的问题，否则你就走开吧。但是成其为问题的问题必然是困难的，否则它早就被解决了。”

派特根对于用计算机做实验一点也没有数学家的不舒服感。假定每一个结果最终都必须由于标准的证明方法而严格化，否则也就不是数学了。在显示屏上看到一个图象，并不保证它在定理和证明的语言中也存在。但可以得到图象这件事本身就足以改变数学的进化。派特根相信，计算机探索给数学家以选取更自然的道路的自由。在当前，一位数学家可以暂时放下严格证明的要求。他可以走向实验把他引到的任何地方，就像物理学家一样。计算的数值能力和对直觉的形象提示可以指出有希望的大路，帮助数学家不进入死胡同。当找到新路，孤立出新对象之后，数学家就可以回到标准的证

明。派特根说，“数学的力量在于严格。我们能够把绝对可靠的一条思路继续下去——这是数学家永远不会放弃的。但是，你可以看一看现在只能部分理解的情况，或许后人能严格理解。是的，我们要严格，但不必严格到如果目前不会做就把它丢掉的地步。”

到了80年代，家庭计算机已经能做足够精确的算术来产生曼德勃罗集的彩色图形，爱好者们很快发现，用越来越高的放大倍数来探索这些图形，给人以扩展尺度的生动感觉。如果把集合设想成行星那样大小的对象，则个人计算机可以显示出整个对象，或者刻划出城市的大小、建筑物的大小、房间的大小、书本的大小、字母的大小、细菌的大小或原子的大小。观察这些图形的人们发现，所有各种尺度具有相似的模式，但每一尺度又是不同的。而所有这些微观景色是由同样寥寥数行计算机代码产生的。①

---

① 曼德勃罗集的程序只有几个实质性的部分。主体是一个指令循环，它取来初始复数并对它运用特定的算术规则。对曼德勃罗集，规则是：$z \to z^2 + c$，其中z从0开始，c是对应于被检验点的复数。于是，取0，乘以自身，加上初始数；取结果（这时就是那个初始数），乘以自身，加上初始数；取新结果，乘以自身，加上初始数。复数的算术运算是直截了当的。复数写成两部分，例如$2+3i$（这个点在复平面上的地址是东2北3）。为了把一对复数加起来，只需把实部相加得到新的实部，虚部相加得到新的虚部：

$$\begin{array}{r} 2+4i \\ +\quad 9-2i \\ \hline 11+2i \end{array}$$

两个复数相乘时，只需把一个数的每一部分被另一个数的每一部分乘，然后把四个结果加起来。根据虚数的原始定义，i自乘等于-1，因此结果中有一项并入另一项：

吸引域的分形边界

曼德勃罗集的程序在边界区花费最多的时间，这里也是必须作出各种折衷的地方。在这里，当经过 100、1,000 或 10,000 次迭代还没有跳出去时，程序还没有绝对把握说该点落入这一步之内。谁知道第 100 万次迭代的结果如何呢？因

$$\begin{array}{r} 2+3i \\ \times \quad 2+3i \\ \hline 6i+9i^2 \\ 4+6i \quad \\ \hline 4+12i+9i^2 \\ =4+12i-9 \\ =-5+12i \end{array}$$

为了把循环打断，程序应当监视变化中的总结果。如果总结果离开平面的中心越来越远，奔向无穷大，则初始点不属于集合；如果总结果的实部或虚部变得大于 2 或小于 -2，它也必定趋向无穷，程序可以继续试下去。但是如果程序重复计算了多次还没有变得大于 2，则该点是集合的一部分。应当重复计算多少次，与放大倍数有关。就个人计算机所能及的规模而言，100 或 200 次已经不算少，1,000 次就很可靠了。

这个程序应对网格中的数千点逐点重复以上过程，还要有一个可调整的比例以便提高放大率。程序还必须把结果显示出来。集合内的点可用黑色，其他的点用白色。为了使图形更生动诱人，白点可以换成按颜色分级的点。例如，如果 10 次重复后迭代就中断了，程序可以画一个红点；20 次重复画橙色点；40 次重复画黄点，等等。颜色和截断点的选取可按程序员的口味调整。这些颜色恰恰在集合本身的外面勾划出一些轮廓线。

此，那些画出曼德勃罗集的最惊人、最深度放大图象的程序，要在庞大的计算机或作并行处理的计算机上运行，在后一类机器上几千个头脑在统一步伐下执行同样的算术运算。边界也是逃离集合的拉引最慢的一些点的区域。就好像它们是在两个竞争吸引子之间寻求平衡，一个吸引子在原点处，而另一个实际上是在无穷远处向集合打招呼。

当科学家们从曼德勃罗集本身转向那些代表实际物理现象的新问题时，集合边界的性质就呈现出来了。动力系统中两个或更多个吸引子之间的边界，是似乎控制着许多普通过程（从材料断裂到制定决策）的一种阈值。在这类系统中，每个吸引子有一个吸引域，就像一条河有汇聚流水的流域一样。每个吸引域有一个边界。对于在80年代初期很有影响的一个小组来说，研究吸引域的分形边界曾是数学和物理学中最有前途的新领域。

动力学的这个分支关心的不是系统的最终稳定行为的描述，而是系统在互相竞争的不同选择中作决定的方式。像如今已成为经典的洛伦兹模型这样的系统只有一个吸引子，当系统安定下来时也只有一种行为占上风，这是一个混沌吸引子。另一些系统可能具有非混沌的定态行为。但可能的定态不止一个。研究分形吸引域边界，就是研究那些有若干非混沌终态的系统，它们可以达到终态之一，问题在于如何预言达到哪一个终态。约克在给混沌命名之后10年，又率先开始了吸引域分形边界的研究。他提出一台假想的弹球机。像多数弹球机一样，它有一个弹簧撞杆。你把撞杆拉下来然后松手把球上弹到游戏区域内。这台机器具有通常的带橡皮边的倾斜地形，还有电弹片可以撞击小球使它获得额外的能量。这

撞击是重要的：它使能量不至于平滑地衰减。为了简单起见，这台机器底上没有装把手，而是开了两条出口斜槽。球必须从两个斜槽之一出去。

这是一台决定论的弹球机——不要摇晃它！只有一个参数控制着弹球的命运，这就是撞杆的初始位置。设想机器设计得使撞杆拉得很短时球总是从右面的槽滚出去，而拉得很长时总是从左面的槽滚出去。在中间情况下，球的行为变得很复杂，以通常的喧闹有力的方式在两边之间跳来跳去，在最后决定从哪个槽出去之前需要经过变化不定的一段长时间。

现在设想用图表示撞杆的各种可能的起始位置的结果。这个图只是一条直线。如果某个位置导致从右面出去，画一个红点；从左面出去，画一个绿点。这些吸引子作为初始位置的函数，情形将如何呢？

这边界原来是一个分形集合，不一定具有自相似性，但有无穷的细节。直线的某些区域是纯红或纯绿，而另一些区域经过放大后则会显示绿中有红或红中有绿的新区域。这就是说，对于撞杆的某些位置，小小的改变没什么关系。而对另外一些位置，任意小的改变都会使颜色不同。

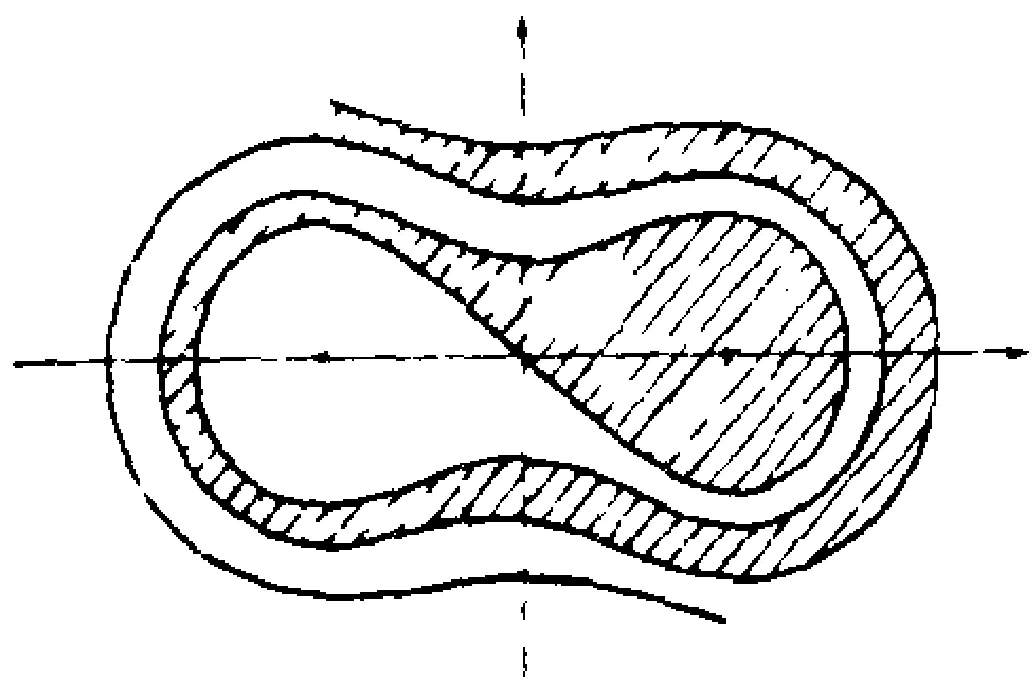
增加第二维就是再加一个参数，一个新自由度。例如，对弹球机来说，可以考察改变游戏板倾斜度的效果。这时人们发现的进进出出的复杂性，会使那些负责控制敏感有力的多参数实际系统的稳定性的工程师们感到害怕。作为这类系统的例子，可以举出动力电网和核电站，两者都在80年代成为受混沌启示的研究的对象。对于参数A的一个值，参数B可能产生有保证的有序的行为，它的稳定区域是连贯的。工程

师们可以准确地根据他们所受线性训练的提示进行研究和画图。然而就在附近可能埋伏着参数 A 的另一个值，它会完全改变参数 B 的作用。

约克在许多会议上演示吸引域分形边界的图片。有些图代表强迫摆的行为，它具有两种可能的终态。他的听众们很了解，强迫摆以基本振荡器的各种面貌出现在日常生活中。约克快活地说："选摆来作演示，就不会有人说我专门造了一个系统来哄大家。这是你们在自然界里处处见到的那类事物。但它的行为却与你们在文献中所读到的完全不同。它是最乱糟糟的那种分形行为。"整个图形是古怪的黑白弯弯，就像用厨房搅拌器把香草和巧克力布丁混在一起，但是只拌了几下就停下来的样子。为了产生这些图片，他让计算机从 1,000×1,000 的网点上扫过，每点代表摆的一个不同的起始位置，然后用黑色或白色表示结果。这就是被大家熟悉的牛顿运动方程混合和折叠起来的吸引域。结果边界占的位置比什么都多。在典型情况下，边界上的点超过 3/4。

对于研究人员和工程师们，这些图包含着教训——教训和警告。人们十分经常地要从很小的数据集合来猜测复杂系统的行为的可能范围。当系统停留在很窄的参数范围内，而且工作正常时，工程师们作观察，希望多少能够线性地外推到不大平常的行为。然而研究分形吸引域边界的科学家们表明，平安和灾难之间的界线可能比任何人梦想过的远为复杂。约克说："东海岸的整个电网是一个振荡系统，大部分时间是稳定的，而你倒想知道扰动以后会发生什么事。你需要知道边界是什么。事实上，他们对边界形状毫无概念。"

吸引域的分形边界在理论物理学中提出深刻的问题。相



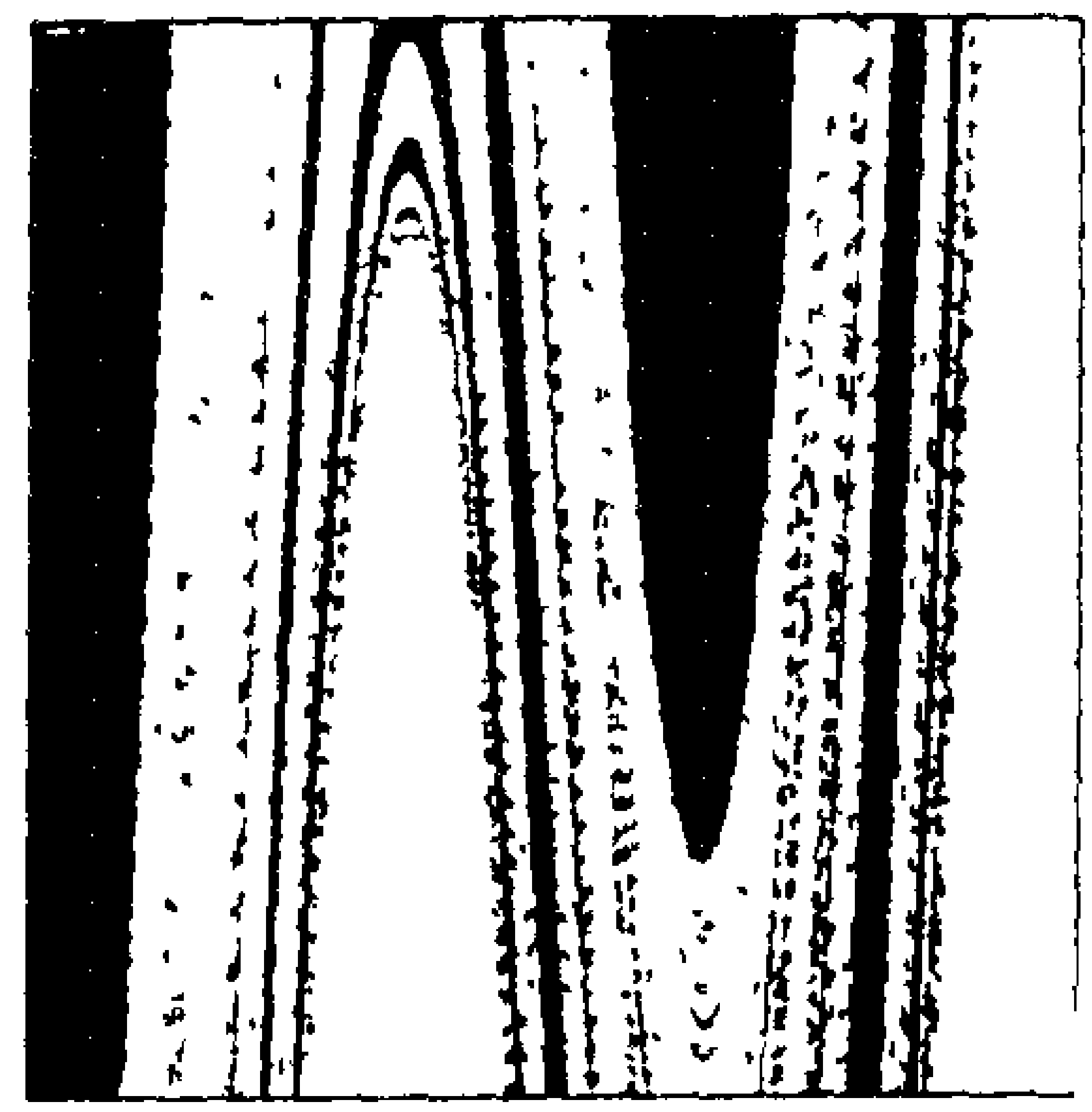


图9 4 吸引域的分形边界

即使 个动力系统的长时间行为不是混沌的，混沌也可能出现在一种定态行为与另一定态行为之间的边界上。动力系统往往具有不止一个平衡态，就像摆下面如果放了两块磁铁，它就可能停止到其中任何一个上。每个平衡态是一个吸引子，两个吸引子之间的边界可能是复杂而光滑的（左图）。边界也可能是复杂而不光滑的。高度黑白相间的分形（右图）是一个摆的相空间图。这个系统一定会达到两个可能定态之一。对于某些初始条件，结果完全可以预言：黑就是黑，白就是白。但是在边界附近就不可能预言了。

变涉及阈值；派特根和里希特观察了一类研究得最好的相变——材料中的磁化和非磁化转变。他们给出的这类边界图形显示出特别美丽的复杂性，看起来非常自然：各种花椰菜形状，带着一层比一层更为缠结的球苞和沟纹。当他们改变参数和增加细节放大倍数时，有一张图看来越发随机，后来忽然出乎意料地在一个令人迷惑的区域的中央深处出现了一个熟悉的扁圆形，上面装饰着朵朵蓓蕾：曼德勃罗集，每一条

卷须、每一粒原子各在其位。这是普适性的又一块路标。他们写道："或许我们应当相信魔术。"

混沌游戏

巴恩斯利选了一条不同的道路。他思考大自然本身的形象，特别是活的生物体所产生的模式。他用尤利亚集做实验，还尝试别的过程，始终寻找产生更大变化性的方法。最后，他转到把随机性作为模拟自然形状的一种新技术的基础。当他撰写关于这种技术的文章时，他把它叫做"借助迭代函数系统的分形整体构造"。然而，在口头上他把它叫做"混沌游戏"。

为了快速进行混沌游戏，需要一台带图示屏幕的计算机和一个随机数字发生器，可是原则上一张纸加一枚硬币就行了。在纸上某处选一个起点，在哪里都没有关系。发明两条规则，一条"正"规则，一条"反"规则。一条规则告诉你如何从一点移到另一点："向东北方向移动 2 英寸"，或者"向中心移近 25%"。现在开始掷硬币和打点子，当硬币正面向上就用"正"规则，反面向上就用"反"规则。如果把前 50 点扔掉不要，就像赌牌者在开始新一轮前先藏起几张牌来一样，你会发现混沌游戏产生的不是由点组成的随机场，而是某种形状，随着游戏的继续进行，形状的轮廓愈益分明。

巴恩斯利的核心见解是：尤利亚集以及其他一些分形图形，虽然正式地看来是决定论过程的后果，却同样正确地可看作一个随机过程的极限。他提出，可以根据类比设想在室内地板上用粉笔画的一张英国地图。带着标准工具的测量员

会觉得测量这些别扭形状的面积是一件复杂事情，因为海岸线毕竟是分形的。但假设你往空中一颗一颗地扔米粒，让他们随机地掉到地板上，然后数出落在图内的米粒数目。随着时间的过去，结果开始接近这些形状的面积——这是一个随机过程的极限。用动力学的语言说，巴恩斯利的形状就是吸引子。

混沌游戏利用一定图形的一种分形性质，即它由主图形的小小复制品构成。写出用来作随机迭代的一组规则，这件事抓住了关于一个形状的某种整体信息，而规则的迭代又与尺度无关地反复回味这一信息。在这种意义上，形状的分形性愈强，适用的规则就会愈简单。巴恩斯利很快发现，他可以生成曼德勃罗书中那些如今已成为经典的所有分形。曼德勃罗的技术是无穷次地不断构造和精细化。为得到科克雪花或席尔宾斯基垫子，人们应取消一些线段并代之以特定的图形。相反，巴恩斯利作混沌游戏时，先从模糊的模仿开始，然后图形逐步分明。不需要精细化过程：只用单独一组规则，其中以某种方式体现了最终的形状。

巴恩斯利与他的合作者们现在着手于一项失去控制的产生图形的计划，图形有卷心菜、霉菌和泥土。关键在于如何把过程倒过来：给出特定形状，怎样选取一组规则。被他称为“大杂烩定理”的答案，描述起来简单空洞得使听众往往以为这里面一定做了什么手脚。你从想要再现的那种形状的一张素描开始。巴恩斯利的最初实验之一曾选用一片黑色的铁角蕨类植物叶子，因为他本人早就是一位蕨类植物迷。然后在计算机上用鼠标作指示器，把小小的复制品放到最初的形状上面，如果需要的话也可以让它们不整齐地互相交叠。高

度分形的形状可以容易地用本身的复制件铺砌满，而简单分形要稍难些，在一定近似下任何形状都可以铺砌好。

巴恩斯利说，“如果图形复杂，规则也复杂。另一方面，如果对象中隐含着某种分形序——而曼德勃罗的核心观察就是自然界中多有此种隐序——那也可能用很少几条规则把它译出。于是这样的模型就比用欧几里得几何做的模型更有意思。因为我们知道，观察叶子的边缘时，其实看不见直线。”他发现桌上计算机产生的第一张蕨类植物图形，与他从童年时起就保存着的一本蕨类植物图鉴中的形象完全一致。“这是一幅令人惊愕的图形，在任何一方面都是正确的。任何生物学家都不难确认它。”

巴恩斯利坚决主张，大自然在一定意义上是在玩自己的混沌游戏。他说，“在一粒孢子中只有那么多信息为一种蕨类植物编码。因此，蕨类植物能长到怎样复杂的程度是有限制的。我们能找到等价的简洁信息来描述蕨类植物，也就不足为奇了。如果不是这样，反倒是怪事了。”

但是，机遇是必需的吗？哈伯德也思考过曼德勃罗集与生物信息编码的并行性，但是他一听说这类过程可能依赖于概率的提法就怒发冲冠。哈伯德说，“曼德勃罗集里没有随机性。我做的任何事情里也没有随机性。我也不认为随机性的可能性与生物学有任何直接关系。在生物学里，随机性就是死亡，混沌就是死亡。任何东西都是高度结构化的。当你无性培育植物时，分支出来的顺序是严格相同的。曼德勃罗集遵从的是异乎寻常地精确的图，它没有给机遇留下任何余地。我强烈地怀疑，有朝一日人们真正弄清楚大脑如何组织时，他们会大吃一惊地发现，存在着一套构成大脑的编码系统，它

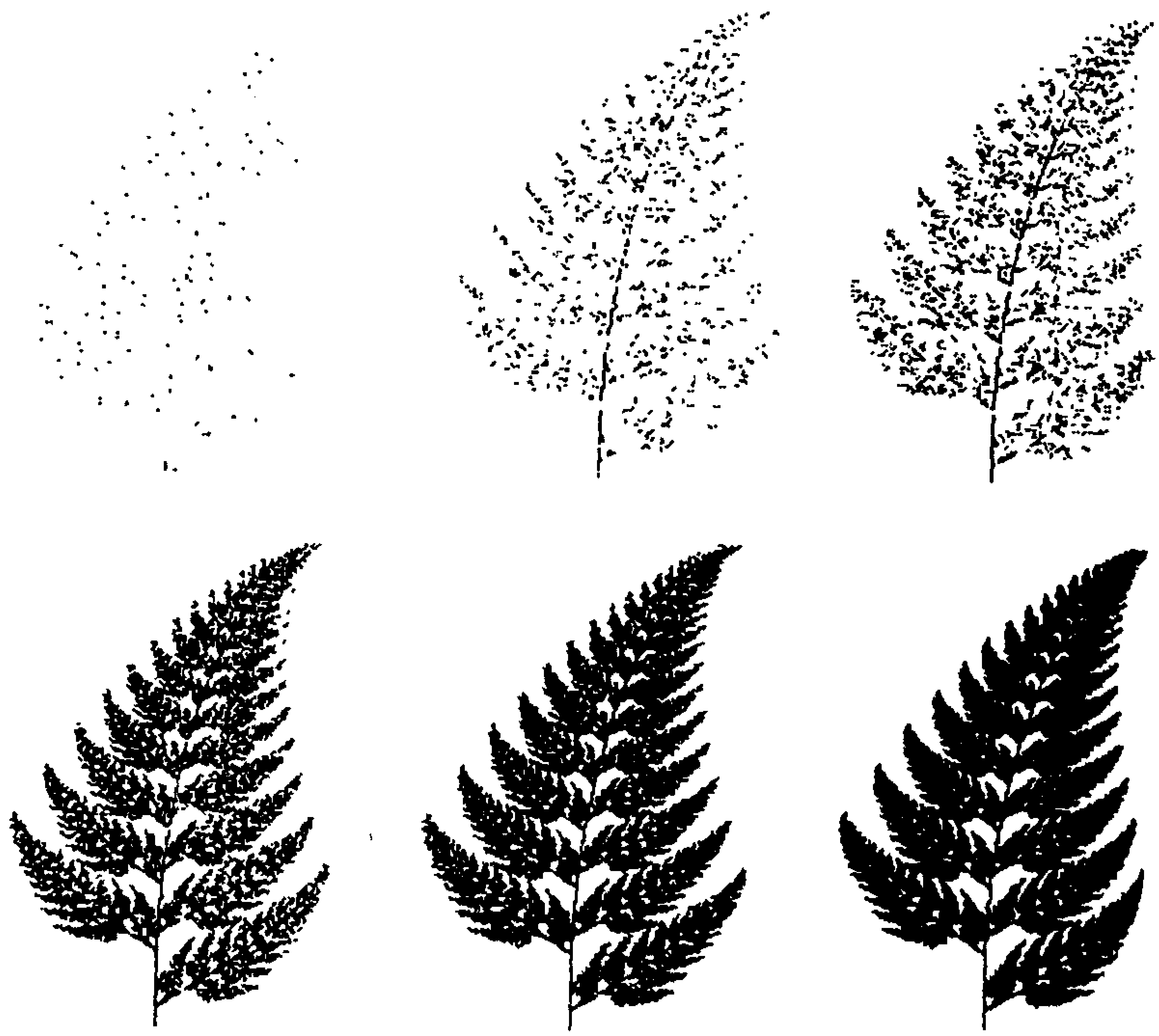


图9.5 混沌游戏

每一个新点都随机落下，但逐渐显现出蕨类植物的形状。全部所需信息都编码在几条简单规则里

异乎寻常地精确。生物学中随机性的想法只是一种反映而已。”

然而在巴恩斯利的技术中，机遇仅仅是工具。结果是决定论的和可以预言的。当点子闪过计算机屏幕时，谁也猜不出下一个点将在哪里出现；这依赖于机器内部“硬币”的投

掷。然而，光束总是限制在刻划出图形所必需的一定界限内。在这种意义上，机遇的作用乃是幻觉。巴恩斯利说，“随机性是与主题不相干的。中心点是得出存在于分形对象上的一定的普适测度。但这对象本身并不依赖于随机性。你总是以百分之百的概率画出同一个图形。

“这是用一种随机算法来探测分形对象，给出深度信息。就像我们刚进入一间新屋子时，眼睛以某种完全可以是随机的顺序瞧来瞧去，于是得到对屋子的完整印象。屋子还是它自己。对象的存在与我碰巧做什么事没有关系。”

曼德勃罗集以同样的方式存在着。在派特根和里希特开始把它变成艺术形式之前，在哈伯德和多阿第懂得它的数学实质之前，甚至在曼德勃罗发现它之前，它已经存在了。一旦科学创造出复数的框架和迭代函数的概念，它就存在了。于是它等待着被揭去面纱。或许更早，当大自然开始用简单的物理定律组织自身，处处以无限的耐心重复着同样的规律时，它就存在了。

10 动力系统集体

跨越革命关头的讯息不可避免地是片面的。

——库恩

圣克鲁斯和60年代

圣克鲁斯是加州大学系统中最新的校区，它位于旧金山以南一小时行程处的如画风景中。人们常说它更像国家森林公园，而不像大学。建筑物半隐半现地处于红杉林中 根据时代精神，设计者们尽力保留了每一棵树。小路通向各处整个校区位于山顶上，因此人们时而可见南面蒙特雷湾的闪闪波光。圣克鲁斯校区在1966年开学，短短几年之内它就成了加州各校区中出类拔萃的一处。学生们把它和知识先锋中的许多偶像联系到一起：布朗、贝特森和马尔库塞在这里讲过课，列瑞尔在这里唱过歌。研究生院的各系从建校伊始就存在矛盾的观点，物理系也不例外。教师们（大约有15位物

理学家）都精力旺盛，多数很年轻，很适应被吸引到圣克鲁斯来的这伙聪明的不循规蹈矩者的气氛。他们处于当时自由思考潮流的影响下；然而他们，这些物理学家们，也遥望着南方的加州理工学院，并意识到需要建立自己的高标准和表明自己是认真有为的。

有一位研究生的认真有为是大家都不怀疑的，他叫斯特森·肖，是一位留着胡子的波士顿人，毕业于哈佛大学。他是一对大夫和护士的6个孩子中的长子，1977年就要满31岁。这使他比其他多数研究生都年长一些。他在哈佛的学业曾经由于服兵役、过群居村生活和两者之间的其他即兴体验而几度中断。他不知道为什么来到了圣克鲁斯。他从未见过这座校园，但他见过一本小册子，里面有一些红杉图片和关于尝试新教育原理的议论。肖很安静羞涩，同时显得很坚强。他是个好学生，还有几个月就要完成关于超导电性的博士论文。谁也没有特别注意到，他正在物理楼地下室里浪费时间摆弄一台模拟计算机。

物理学家的教育基于一种师徒关系。成熟的教授们找一些研究助理来帮助做实验工作或冗长的计算。作为报答，研究生和博士后们从教授的经费中分一点钱，并分享一些发表论文的荣誉。好的导师帮助学生选择既可行又可能出成果的课题。如果这个关系成功，教授的影响还可以帮助徒弟找到职业。他们的名字常常会永远联到一起。然而，当一门科学还不存在时，很少有人准备讲授它。1977年混沌方面没有导师，没有混沌课，没有非线性和复杂系统的研究中心，没有混沌教科书，甚至没有混沌期刊。

模拟计算机

凌晨一点钟，在波士顿一家旅馆的门厅里，一位圣克鲁斯的宇宙论和相对论学者威廉·伯克，碰上了~~自己的一位~~天体物理学家朋友施皮格尔，他们两人都在那里参加一次广义相对论的会。施皮格尔说，“嘿，我刚才在听洛伦兹吸引子。”他已经用临时搭成的电路与一套高保真度的设备相连，把这个混沌的标志变成一种循环的滑音加哨音的反旋律。他把伯克带到酒吧间去用点饮料，并且向他作解释。

施皮格尔认识洛伦兹本人，并且从60年代起就知道混沌。他曾从事寻求星体运动模型中出现杂乱行为的可能性的线索。他还与法国数学家保持联系。最后，作为哥伦比亚大学的教授，他把太空中的湍流——“宇宙节律失调”——作为自己天文研究的焦点。他有以新思想感染同事的资质，当夜阑人静时，他也感染了伯克。伯克对这类事物是开放的。他的名声来自认真研究了爱因斯坦留给物理学的颇具悖论性的礼物之一——流过时空结构的引力波的概念。这是一个高度非线性的问题，具有同流体动力学中讨厌的非线性有关的不规则行为。它又是完全抽象和理论性的问题。但是伯克也喜欢脚踏实地的物理，有一次还发表了一篇关于啤酒杯光学的论文，讨论可以把杯子做得多厚还能保持满杯啤酒的外观。他喜欢说自己有点返祖性，即把物理认为是现实。除此之外，他还读过梅在《自然》杂志上的论文，文章呼吁应有更多关于简单非线性系统的教育。他也花了几小时在计算器上求解梅的方程。因此，洛伦兹吸引子听起来很有趣。但是他无意听

它，而想看见它。当他回到圣克鲁斯时，就交给肖一张纸片，上面潦草地写了一组三个微分方程。肖能够把它们放到模拟计算机上吗？

在计算机的发展中，模拟机代表了一条死胡同。它们并不属于物理系，它们在圣克鲁斯的存在纯属偶然。圣克鲁斯最初的计划包括工学院。当这个计划后来被取消时，性急的经办人已经买进一些设备。基于电路的开或关、零或一、非或是的数字计算机，对于程序员的问题给出精确回答，而且对统治了计算机革命的技术小型化和高速化更适应得多。任何在数字计算机上做过一次的事，都可以重做而且结果准确相同，原则上还可以在任何其他数字计算机上重做。模拟计算机从设计上就允许失真。它们的建筑构件不是"是一非"开关，而是电阻器和电容器这类电子电路——每一个在固态时代之前玩过收音机的人都熟悉，肖也是其中之一。圣克鲁斯的这台模拟机是一架沉重的布满灰尘的家伙，它前面有一块接插面板，有点像老式电话交换台所用的。为模拟计算机编程序，就是选取电子元件并往面板里插电线。

靠构造各种不同的电路组合，程序员可以模拟各种微分方程组，所用方法很适宜于工程问题。假设你想模拟一个由弹簧、阻尼器和重物组成的汽车悬架，以便设计最平稳的运行。电路中的振荡可以做得与物理系统中的振荡相对应。电容器代替弹簧，电感器代表质量，等等。计算并不精确，它回避了数值计算。相反，这是一个由金属和电子组成的模型，它速度很快，而最好的是容易调整。简单地转动旋钮，就可以调整变量，使弹簧变强些或使摩擦变弱些。可以实时观察结果的变化，在示波器屏幕上跟踪波形。

在楼上的超导实验室里，肖正在漫不经心地结束论文工作。但他正开始把越来越多的时间花在模拟机上，并已经学会观察一些简单系统的相空间图象——它们代表周期轨道或极限环。即使他看到过以奇怪吸引子形式出现的混沌，他肯定还不认识。写在纸片上交给他的洛伦兹方程，并不比他已经尝试过的方程更复杂。只需用几个小时来插好电线和调整旋钮。几分钟之后，肖明白他永远也不会结束自己的超导论文了。

他在地下室里花了好几个晚上，观看示波器的绿点在屏幕上飞转，一次次地勾划出洛伦兹吸引子的有特征的猫头鹰面具。形状的流动在视网膜上留下痕迹，这闪烁颤动的东西同他在研究中见过的任何对象都不一样。它看来有自己的生命。它像火焰一样引人思考，变幻的花样永不重复。模拟机的不精确性和不十分准确的重复性，成了对肖有利的优点。他很快看到了对初始条件的敏感依赖性，这曾使洛伦兹认为长期天气预报会劳而无功。他置好初始条件，按启动键，于是吸引子开始运动。然后他尽可能地再置同样的初始条件，但轨道却高高兴兴地驶离上一次的路线，可又最终回到同一个吸引子上。

在儿童时代，肖曾经幻想过科学是什么样子——浪漫地匆忙撞入未知世界。此刻的探索变得与童年幻想一样。在爱捣鼓的人看来，低温物理是很有意思的：一大堆管道和磁铁，液氦和刻度盘。但肖看不出前景。很快他把模拟计算机搬到楼上，那间实验室里再也不搞超导了。

这是科学吗？

在最初日子里就顺便看过运动中的洛伦兹吸引子的一位数学教授亚伯拉罕说，“你应当做的全部事情就是把手放到这些旋钮上，突然你就开始探索另一个世界，这里你是最初的旅行者之一，而你决不会白来。”在伯克利校园最光辉的早年，他曾经同斯梅尔在一起，因此他是圣克鲁斯的教授中很少几位能抓住肖的游戏的实质意义者之一。他的第一个反应是对显示速度吃惊，而肖指出他加了个大电容器才不致跑得更快。同时，这个吸引子也是顽强的。模拟电路的不精确性恰好证实了这一点——拧动旋钮不会使吸引子消失，也不会使它变成什么随机的东西，而只是使它转动或弯曲；转动和弯曲的方式也慢慢明白了。亚伯拉罕说，“肖具有那种用少量探索揭示全部秘密的本能经验。所有那些重要的概念——李雅普诺夫指数以及分维——都会很自然地产生。你自己可以看出来并且开始探索。”

这是科学吗？这肯定不是数学，这是没有形式体系或证明的计算机工作，无论像亚伯拉罕这样的人给予多少同情的鼓励，也改变不了这一点。物理系的教授们也没有理由认为这是物理。不管是什么，它吸引了一批观众。肖通常不关门，而物理系的入口就在大厅对面。过路人很多。不久，他就发现自己有了伙伴。

这个把自己叫做“动力系统集体”的小组（别人有时叫它“混沌小集团”）以肖作为一声不响的中心。肖有一个弱点，就是在学术场合提出自己的思想时有点踌躇；所幸的是，他

的新合作者们没有这个问题。他们共享着这没有计划地探索未知科学的美梦。

法默，一位高大瘦削、头发黄中带红的得克萨斯人，成了这个集体的最有表达能力的发言人。1977 年他才 24 岁，充满了活力和热情，简直是一架思维机器。凡是遇见过他的人最初会觉得他是一团火。比他年轻三岁、也在银城新墨西哥镇长大的童年伙伴帕卡德，在那年秋天来到圣克鲁斯时，正值法默准备把一年的精力奉献给用运动定律研究轮盘赌的计划。这件事是既认真而又牵强的。在以后十几年时间里，法默和一组不断变化成员的物理学伙伴、职业赌客和凑热闹的人，坚持追求着轮盘赌之梦。甚至在加入了洛斯阿拉莫斯国家实验室理论部之后，法默也没有放弃它。他们计算了倾斜度和轨道，一再改写各种软件，把计算机藏在鞋子里面，神经质地闯到赌场去。但是结果并不像计划的那样。有的时候，整个集体的成员，除了肖一人之外，都把精力花到轮盘赌上，虽然这也不平常地训练了他们对动力系统作出快速分析，但却没有使圣克鲁斯的物理系教授们认为法默是在认真对待科学。

组内的第四位成员是克拉奇菲尔德，最年轻的也是唯一的加州本地人。他是个健壮的矮个儿，技艺高超的滑翔运动员，而对于这个集体最重要的一点是，他是个天生的计算能手。克拉奇菲尔德是作为本科生来到圣克鲁斯的，做过肖在混沌之前的超导实验助手，按圣克鲁斯人们的说法，他还“翻过山去”到圣何塞的国际商用机器公司研究中心干了一年，直到 1980 年他事实上还没有成为物理系的研究生。但那时他已经在肖的实验室旁边转了两年，并且抓了为理解动力系统所必需的数学。像组里的其他人一样，他也离开了系里

的常轨。

还在1978年春天，在系里确信肖正在放弃超导论文之前。他的工作眼看就要完成。不论他本人多么不情愿，系里还是劝他，可以尽快通过一切手续，取得博士学位，然后走向现实的世界。至于混沌，在学术上是否合适还有一些问题。在圣克鲁斯没有人有资格指导这个没有名字的学科。也没有人在这方面得过博士学位。这种专业的研究生肯定找不到工作。钱也成了问题。圣克鲁斯的物理研究，同每所美国大学一样，主要受国家科学基金会和其他联邦政府机构的资助，而资助是通过系里教授们的研究项目拨款的。海军、空军、能源部和中央情报局，都花费大量资金于纯科学研究，而不必关心立即应用于流体动力学、空气动力学、能源或情报工作。系里的物理学教授会得到足够的钱来支付实验设备费用和助手即研究生们的工资，这些人就靠资助生活。教授支付他们的复制费，开会旅费，甚至暑假期间的生活费。否则一位学生在财政上就没有着落。而现在肖、法默、帕卡德和克拉奇菲尔德正在同这个制度切断关系。

如果什么电子设备在夜里不见了，那末精明人就会到肖过去的低温实验室去找。有时集体内某位成员会从研究生会讨来100美元，有时系里想办法给这么个数。笔绘仪、转换器、电子滤波器开始积累起来。楼下粒子物理组里有一台小数字计算机快进废料堆了，它也来到肖的实验室里。法默成了乞讨计算时间的特别专家。有一年夏天，他被请到科罗拉多州博尔德的国家大气研究中心，那里用巨型计算机处理着全球天气模拟这样的研究课题，而他吮吸昂贵计算时间的本领使气象学家们为之震惊。

圣克鲁斯人捣鼓东西的本事也帮了大忙。肖就是搞“小发明”长大的。帕卡德童年时在银城就修理过电视机。克拉奇菲尔德属于第一代以计算机处理器的逻辑作为自然语言的数学家。位于红杉树荫中的物理楼本身同其他地方的物理楼一样，有着千篇一律的水泥地板和需要经常粉刷的墙壁。但在混沌小组占有的这间屋子里却是另一种气氛：地上堆着纸，墙上挂着塔希提岛民的照片，还有打印出来的奇怪吸引子。几乎在任何时候，而夜里比早上更有保证，访问者可以看到组内成员们在改装电路，拉出插头，争论着意识或演化，调整示波器的显示，或者注视着发光的绿点勾划出明亮的曲线，它的轨道闪烁着，翻腾着，像活的东西一样。

“长远的梦想”

法默说：“同一件事把我们大家吸引住了：你可能得到了决定论而实际上又没有得到。一想到所有这些我们学习过的经典的决定论系统可以产生随机性，就引起好奇心。我们急于弄懂这是怎么回事。

“如果你没有被典型的物理学教程洗过六七年脑筋，你就不能体会这是怎样意想不到的事。你学过的经典模型的每一件事都由初始条件决定，然后你学过量子力学模型的一些事也是被决定的，不过你必须力求摆脱关于你能获取多少初始信息的限制。‘非线性’这个词你只能在书末看到。一位物理系学生可能选一门数学课，最后一章可能讲非线性方程。你可能跳过这一章，即使不跳，那里讲的不过是如何把这些非线性方程约化成线性方程，无论怎么说，你只能得到一些近

似解。这只是一种令人失望的习题。

“非线性会给模型带来什么真正的差别，我们对此毫无概念。一个方程可能以看起来随机的方式在那里蹦跳，这种想法就足以激动人心。你会说，‘这随机运动是从哪里来的？我在方程中看不见它。’这看来像是无理取闹，或无中生有。”

克拉奇菲尔德说，“这是意识到这里有一个完整的物理经验的王国，它不能纳入现存的框架。为什么不是我们学过的内容的那个部分呢？我们有机会再次看看身边这个美妙的世界，并且明白一些东西。”

他们自己着了魔，提出让教授们震惊的一些问题：决定论、理智的本质、生物进化的方向。

帕卡德说，“把我们粘合在一起的胶水是一种长远的梦想。使我们吃惊的是：拿一个在经典物理学中已经分析到家的正规的物理系统，只要在参数空间中往外走一小步，结果就碰到一些东西，那一大堆分析全用不上了。

“混沌现象完全可以在很久很久以前就被发现。它没有被发现，部分就是因为关于规则运动动力学的这一大堆工作没有指向那个方向。然而你只要瞧一眼，它就在那里。它再次向我们指出，必须靠物理、靠观察来引导自己，才能看出可以发展什么样的理论图象。从长远看，我们认为复杂动力学的研究可能是一个起点，它会导致理解真正的、真正复杂的动力学。”

法默说：“从哲学水平上来说，使我吃惊之处在于这是定义自由意志的一种方式，是可以把自由意志和决定论调和起来的一种方式。系统是决定论的，但是你说不出来它下一步要干什么。同时，我总觉得在世界上，在生命和理智中出现

的种种重要的问题必然与组织的形成有关。但是你怎么研究它呢？生物学家们所干的事看来过于实用和特殊；化学家们肯定不干这些事；数学家们根本不干，而这也是物理学家们恰恰不去干的事。我总觉得自组织的自发出现应当是物理学的一部分。

“这里是一枚有正反面的硬币。一面是有序，其中冒出随机性来；仅仅一步之差，另一面即是随机，其中又隐含着有序。”

测量不可预言性

肖和他的同事们必须把不成熟的热情变成科学纲领。他们必须提出可能回答而且值得回答的问题。他们寻找把理论和实验联系起来的方法——他们感到这里有一条需要填起来的鸿沟。甚至在开始之前，他们就必须弄清楚什么已知，什么未知，而这本身就是可怕的挑战。

他们受到科学中零敲碎打的传播倾向的妨碍，当新的学科在已经确立的老学科分支之间跳来跳去时，情况尤其如此。他们有时不知道自己是在新领土还是老王国。对于他们的无知的一副无法估价的解毒剂是佐治亚州理工学院的福特，一位混沌的鼓吹者。福特已经认定非线性动力学是物理学的未来——整个未来，并把自己变成了期刊情报交换所。他的背景是非耗散的混沌，天文系统或粒子物理中的混沌。他对于苏联学派的工作有深切了解，他的事业之一就是同任何一位与这个新事业的哲学精神有遥远共鸣的人建立联系。他处处有朋友。任何科学家只要寄来有关非线性科学的论文，福特

都会把他的工作收进他发行的越来越厚的摘要中去。圣克鲁斯的学生们听说了福特的摘要，于是准备了打印明信片去索要尚未发表的文章。不久，预印本如潮而至。

他们明白了对奇怪吸引子可以提出许多种问题。它们的特征形状如何？它们的拓扑结构如何？几何学能对有关动力系统的物理揭示些什么？第一种办法就是肖已经开始做的直接用手去探索。大部分数学文献直接处理结构，但这种数学方法还是使肖觉得过于详细——树木太多而森林太少。在钻研文献的过程中，他感到这些被原有传统剥夺了新的计算工具的数学家们，过分沉湎于轨道结构的特殊复杂性：这里是无穷大，那里是间断性。数学家们没有特别关心模拟模糊性，而在物理学家看来，这模糊性确实控制着现实世界中的系统。肖在示波器上看到的不是单个轨道，而是一个包络，其中嵌入了许多轨道。当他细调旋钮时，正是这包络在变。他还不能用数学拓扑学的语言来严格解释那些折叠和扭曲。但是他开始感到自己明白了。

物理学家想作测量。在这些若隐若现的运动形象里测量什么呢？肖和其他人试图孤立出使奇怪吸引子如此迷人的特殊性质。对初始条件的敏感依赖性——邻近轨道互相拉开的趋势。正是这种性质使洛伦兹意识到决定论的长期天气预报不可能。但是测量这种性质的量规何在？不可预言性本身可以测量吗？

对这个问题的答复在一个俄国概念中：李雅普诺夫指数。这个数恰好提供了对应于不可预言性这样的概念的拓扑性质的测量。一个系统的李雅普诺夫指数提供了测量吸引子相空间中拉伸、收缩和折叠的互相冲突的效应的方法。它们给出

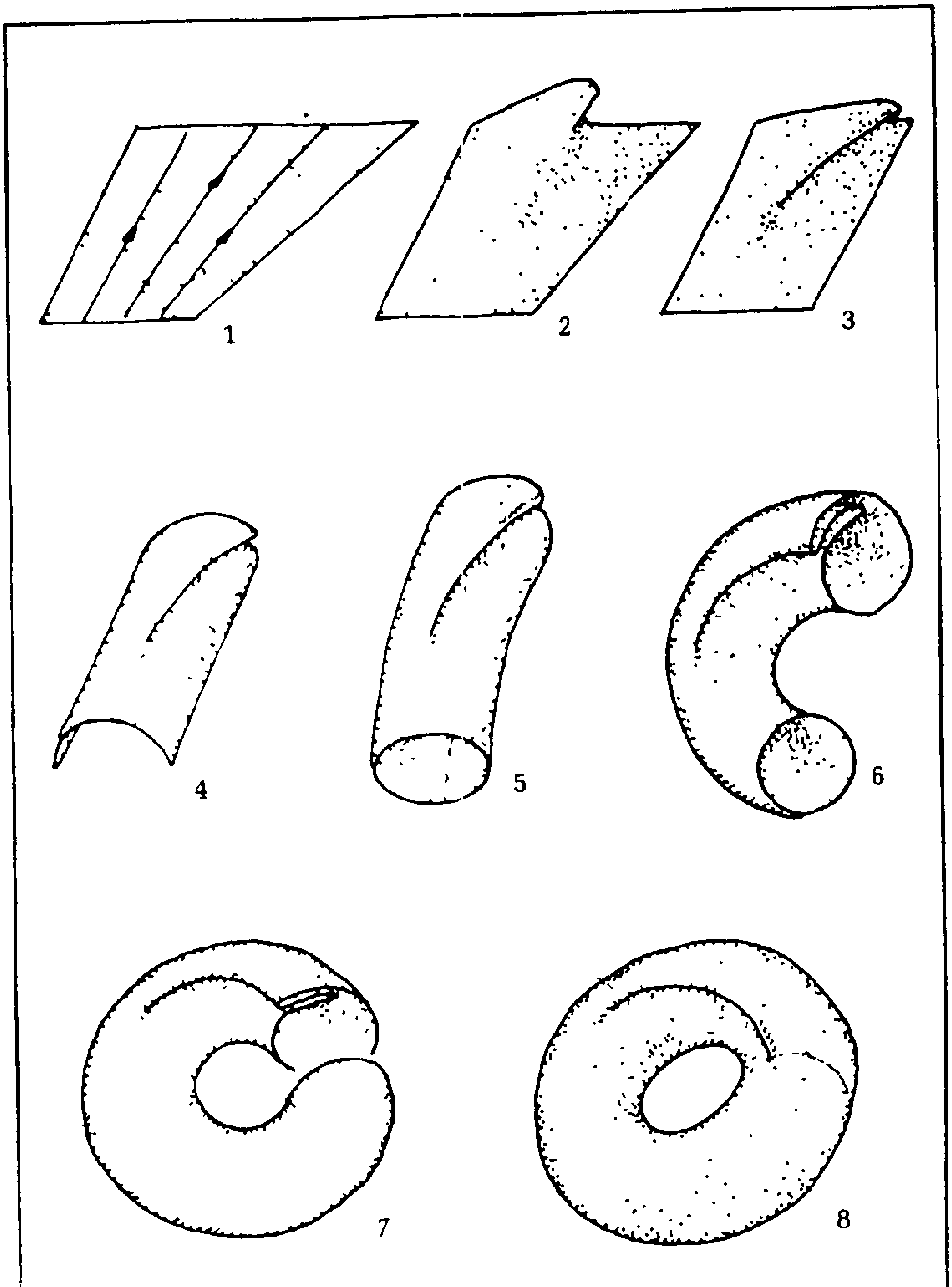


图 10 1　相空间的折叠

相空间的拓扑变形造成一个吸引子，它像一个面包圈折叠进自己里面，叫做伯克霍夫面包圈。

导致系统稳定或不稳定的全部性质的图景。大于零的指数表示拉伸——邻近的点互相分离。小于零的指数表示收缩。对于不动点吸引子，所有的李雅普诺夫指数都是负的，因为拉的方向是向内朝着最终的定态。具有周期轨道形式的吸引子有一个指数准确为零，其余的指数是负的。而奇怪吸引子呢，原来至少有一个正的李雅普诺夫指数。

圣克鲁斯的这些学生懊恼没有发现这一思想，但他们用尽可能实际的办法把它加以发展，学会了怎样测量李雅普诺夫指数，并把它们与其他重要性质联系起来。他们用计算机动画片来演示动力系统中有序和混沌如何在一起跳动。他们的分析生动地表明，某些系统怎样能在一个方向产生无序，而在另一个方向保持整齐和有条理。有一部影片演示了奇怪吸引子上一小团邻近的点——代表初始条件——在系统随时间演化时发生些什么事。这一团开始展开，失去中心。它先变成一个圆点，然后成为污斑。对有些吸引子，这污斑很快散到各处。这类吸引子具备有效的"混合性"。而另外一些吸引子，只在某些方向散开。污斑会成为一个条带，沿一个轴混沌，而沿另一个轴有序。就好像系统同时具有有序和无序两种冲动，两者互不耦合。当一个冲动导致随机的不可预言性时，另一个冲动却像精确钟表一样在时间上很准。两种冲动都可以定义和测量。

信息论

圣克鲁斯人留在混沌研究中的最有特色的印迹与信息论有关。信息论是贝尔电话实验室的研究员香农在40年

代后期发明的一种带哲学味的数学。香农原来的题目叫"通讯的数学理论"，它主要论述一个称为信息的特殊的量，因此得名信息论。这一理论乃是电子时代的产物。通讯线路和无线电广播在传送着某种东西，计算机把同样的东西存储在穿孔卡或圆筒磁带上，而这东西既非知识，又无意义。它的基本单位不是思想或概念，甚至也不必是词或数。这东西可以有意思，也可以是胡说，但是工程师和数学家们可以测量它，传输它，并且检查传输的准确程度。"信息"这个字眼同其他词一样好，但是人们应当记住在信息论里这是个特殊的、不具有价值的术语，它也不具有事实、学习、智慧、理解、启发的通常涵义。

理论的形式是由硬件决定的。因为信息存储在二进制开关中，而开关新近得了"位"这个名字，所以"位"也就成了信息的基本量度。从技术观点看，信息论是抓住噪声如何干扰位的流动的关键，这里噪声就是随机误差。对于通讯线路、加密盘或者任何把语言、声音或图象编码的技术，它给出预言其所需携带能力的方法。它提供了计算各种改错方式的有效性的理论方法，例如，利用一些位来检查其他位。它使"多余信息"这一关键概念可以"咬"得动了。用香农信息论的名词，普通语言含有超过50%的多余信息，即传送信息时并非严格必需的声音或字母。这是一个熟悉的思想：在说话含混不清、充满印刷错误的世界里，普通的通讯依赖于多余信息。速记训练的著名广告——if u cn rd ths msg①…——说明了这一点，而信息论则允许测量它。多余信息可

① If you can read this message（如果你能读这一信息）。——译者

预言地偏离随机性。普通语言中的一部分多余信息在它的涵义里，这一部分难以定量化，它依赖于人们关于他们的语言及外部世界的一些共享的知识。这部分使得人们可以解决纵横填字难题或猜出句尾丢了的词。但是另外一些多余信息则更易于用数字测量。从统计学上说，英语中一个字母是e的可能性要比1/26大得多。而且字母并不是孤立的单位。知道了英语课文中的一个字母是t，就有助于猜测下一个字母可能是h或o，而知道了两个字母就有助于猜更多的，如此等等。一种语言中出现各种两个和三个字母组合的统计趋势，在掌握语言的结构实质方面很有作用。一台计算机在各种可能的三个字母串的相对可能性指引下产生的在其他方面随机的胡言乱语，可能被认出来是用英语说的。密码专家们早就在使用这种统计模式来破译简单码。通讯工程师现在利用它们来设计压缩数据的技术，即在传输线或存储盘上取消多余信息以节省空间。对于香农来说，看待这些模式的正确方法是：普通语言的数据流信息量比随机流少；每一新位部分地受前面各位的限制；因而每一新位携带的信息量比一位所能具有的实际信息量少。在这个表述中已经暗含着某种自相矛盾。一个数据流越是随机，每一个新位所传递的信息越多。

除了技术上迎合了计算机时代的开端，香农信息论还获得了小小的哲学地位。而这个理论对于香农领域以外的人们的诱惑，在相当大的程度上来自他选用的一个单词：熵。正如韦弗在一篇关于信息论的经典论述中所说："当在通讯理论中遇到熵的概念时，人们有权很激动，有权感到自己掌握的某种东西会成为基本和重要的。"熵的概念来自热力学，在那里它是第二定律的附属物，即整个宇宙和其中任何孤立系统，

有滑向愈益无序的状态的不可抗拒的趋势。把游泳池隔成两半；一半充水，一半充墨水；等一切平静下来；提起隔墙；仅仅由于分子的随机运动，水和墨水最终要混合起来。即使等到宇宙末日，这种混合永远也不会倒过来。这就是为什么人们常说，物理学中第二定律把时间变成了单行道。熵是各种系统根据第二定律不断增长的性质——混合、无序、随机性——的名称。直觉掌握这一概念，比在现实生活中测量它容易。怎样才能可靠地试验两种物质的混合程度？可以设想在某种取样中数出每种分子的数目。如果它们的排列为是—非—是—非—是—非—是—非，如何呢？当然不能认为熵很高。你可以只数出偶位上的分子数，但是那排列如果为是—非—非—是—是—非—非—是，又如何呢？有序以任何直接计数算法不能对付的方式侵入。而在信息论中，涵义和表示方法又带来了额外的复杂性。像 01 0100 0100 0010 111 010 11 00 000 0010 111 010 11 0100 0 000 000……这样的序列，可能只在熟悉莫尔斯码和莎士比亚的人看来才是有序的①。奇怪吸引子的拓扑反常模式又如何呢？

在肖看来，奇怪吸引子是信息机器。根据他的第一个也是最主要的概念，混沌提供了一个把信息论从热力学得来的思想送回到物理科学去的自然途径，而在形式上更富生气。奇怪吸引子合有序和无序于一身，对于如何测量一个系统的熵的问题是挑战性的转折。奇怪吸引子也是有效的混合器。它们导致不可预言性。它们提高了熵值。而且照肖看来，它们

① 这串数码按照莫尔斯码译出来是莎士比亚的名句：All form is formless（一切有形皆无形）。——译者

在原来没有信息的地方创造出信息。

有一天帕卡德在阅读《科学美国人》时发现了一则广告，那是称为雅科竞赛的征文。事情是相当牵强附会的，原来一位法国金融家构造了一个星系套星系的宇宙结构理论，捐资设立了这一奖金。它征求与雅科的题目有关的任何文章。（法默说，“听起来像一束怪信。”）然而竞赛评审委员会却由法国科学界一些有影响的人物组成，而且那笔奖金也相当可观。帕卡德把广告拿给肖看，截止日期是1978年元旦。

那时，这个集体已经在圣克鲁斯离海滩不远的一座特大的旧房子里定期聚会。房子里布置了一些从旧货市场买来的家具和计算机设备，其中不少是用来研究轮盘赌问题的。肖放了一架钢琴在那里，他有时弹奏风格奇特的乐曲，有时即席创作自己的古典与现代混合音乐。在他们的聚会中，这些物理学家们发展了一种工作风格，那就是把各种思想抛出来，通过某种实践的筛子挑选，阅读文献，孕育自己的文章。他们终于学会了一种相当有效的循环签名合作发表期刊文章的方式。但第一篇论文是肖的为数不多的文章之一。他的特点是自己写作，另一个特点是拖得很迟。

1977年12月，肖从圣克鲁斯去参加纽约科学院召开的第一次关于混沌的会议。他的超导教授为他付了路费，他不请自至地当面聆听了那些过去只从文章中知道的科学家茹厄勒、梅、约克的报告。肖对这些人颇为敬畏，也为那35美元一天的旅馆费用吓了一跳。在听报告时，他总是在两种感觉之间回荡，一方面感到由于自己不了解情况而重复了这些人已经相当详细地论述过的思想，另一方面觉得自己有重要的新观点可以贡献出来。他带来了那篇没有写完的信息论论文

的草稿，一叠潦草地手写的纸片夹在一个夹子里；他想从旅馆或附近修理店找一台打字机而没有成功。最后只好带着夹子走了。后来，朋友们要他讲述这次会议的详情时，他说高潮是为洛伦兹举行的一次晚餐。洛伦兹终于得到了这么多年来未曾得到的承认。当洛伦兹不好意思地握着妻子的手进入房内时，科学家们起立为他欢呼。肖吃惊地看到这位气象学家像是被吓坏了。

几星期之后，肖在去缅因州（他的父母在那里有一处度假别墅）的途中，终于把那篇论文寄给了雅科征文评委会。新年已经过去，但当地邮局办事员宽宏大量地盖上了倒填日期的邮戳。这篇论文是深奥数学和思辨哲学的混合物，配有肖的弟弟克里斯为他作的漫画式的插图。文章获得好评。肖获得了数目不少的奖金，足够他旅行到巴黎去领受这份荣誉。这是一项小小的成就，但这是在该组和系里关系困难的时刻获得的。他们急需有一些外界承认的荣誉。法默放弃了天体物理，帕卡德荒废了统计力学，克拉奇菲尔德还没有准备正式成为研究生。系里觉得事情已经失控。

从微观尺度到宏观尺度

“奇怪吸引子、混沌行为和信息流”这篇文章当年以预印本形式流传，最终大约达到1,000份。这是把信息论和混沌交织起来的第一次艰苦努力。

肖让经典力学的某些假定重见光明。自然系统中的能量存在于两个层次上：宏观尺度，这里日常生活中的对象可以计数和测量；微观尺度，这里无数原子在随机地游泳，这种

随机运动除了作为平均整体即温度外是无法测量的。肖指出，处于微观尺度的总能量可以超过宏观尺度的能量，但在经典系统中，这种热运动是无关的——孤立而无法用的。两个尺度之间没有联络。他说，“为了做一道经典力学题，并不需要知道温度。”然而肖的观点是，混沌和近混沌系统填补了宏观尺度与微观尺度间的鸿沟。混沌是信息的创生。

可以设想水流经过障碍。每一位流体动力学家和独木舟划手都知道，如果水流足够快，则在下游要产生旋涡。在某一速度下，旋涡停在原处。速度高到一定程度，它们开始运动。实验家可以选择各种方法从这样一个系统中提取数据，利用速度探测器等等，但是他们不能做一件更简单的事：在障碍的正下方取一点，按均匀的时间间隔，问旋涡是向右面还是左面流过。

如果旋涡是静态的，数据流可能是：左—。过一会儿，观察者开始感觉新数据并不带来关于系统的新信息。

旋涡也可能周期性地来回运动：左—右—左—右—左—右—左—右—左—右—左—右—左—右—左—右—左—右—左—右—。虽然一开始多了一点意思，但它很快就不带来什么意外了。

但是当系统变得混沌以后，严格地由于不可预言性，它产生持续的信息流。每次新观察给出新的一位。对于想完全地描述这个系统的实验家来说，这倒成了问题。肖说：“他永远不能离开那儿了，因为这水流成了连续的信息源。”

这信息是从哪里来的？来自微观尺度的热库，那几十亿

在随机热力学舞动中的分子。就像湍流把能量从大尺度经过一串串涡旋往下传到耗散的小黏滞性尺度一样，信息反过来从小尺度传向大尺度——至少，这是肖和他的同事们开始作的描述。而把信息向上传的渠道就是奇怪吸引子，它把初始的随机性放大，就像蝴蝶效应把小小的不确定性放大成大尺度的天气模式一样。

问题在于定量化。肖在无意中作了一些重复工作之后发现，苏联学者又走在前面了。柯尔莫果洛夫和西奈已经用启发性的数学，阐明了如何把系统的“单位时间的熵”用于在相空间中拉伸和折叠的曲面的几何图象。技术的概念核心是在初始条件的集合周围画出一个任意小的盒子，就像在气球面上画个小方块，然后计算各种膨胀或扭曲对盒子的效应。例如，它可能沿一个方向拉长，而在另一方向保持很窄。面积的变化对应于所引入的关于系统过去的不确定性，即信息的盈或亏。

在信息只不过是不可预言性的另一种叫法的意义上，上述概念与茹厄勒等人所发展的思想是一致的。然而信息论的框架允许圣克鲁斯小组搬用通讯理论家们已经研究得很透的一套数学推理。例如，对决定论系统添加外来噪声在动力学中是个新问题，但在通讯中已足够熟悉。然而，数学只是吸引这些年轻科学家的部分真正原因。当他们谈论系统在产生信息时，想的是世界上自发产生的各种模式。帕卡德说：“在复杂系统动力学的顶峰处，是生物进化过程或思维过程。直觉上就会觉得这些极其复杂的系统是在产生信息。几十亿年之前，只有原生质的一些小泡泡；而几十亿年之后的现在已经有了我们。因此，在我们的结构中就生成和存储了信息。在

一个人的思想从童年时代起的发展过程中，信息很清楚不仅被积累，而且被产生——由于以前并不存在的联系而创生出来。”这类谈话可以使一位清醒的物理学家头晕目眩。

滴水的龙头

可是他们这伙人首先是捣鼓鬼，其次才是哲学家。他们能够把了解得如此之好的奇怪吸引子同经典物理实验搭起桥来吗？说“右一左一右一右一左一右一左一左一左一右”是不可预言的和产生信息的，这是一回事。拿来真正的数据流，测量它的李雅普诺夫指数、熵和维数，是十分不同的另一回事。这些圣克鲁斯的物理学家们还是比他们前辈中的任何人更习惯于这些想法。日日夜夜与奇怪吸引子打交道之后，他们已经确信可以在日常生活的拍、摇、打、摆这些现象中辨认出它们来。

他们坐在咖啡馆里玩一种游戏。他们问：最近的奇怪吸引子有多远？是那个格格作响的汽车挡泥板吗？是那面在微风中奇怪地突然折断的旗子吗？还是那片颤动的树叶？肖附和着库恩说，“在你有正确的隐喻足以感受它之前，你是什么也看不见的。”不久之前，他们的朋友、相对论专家比尔·伯克认定自己汽车的速度计是在以奇怪吸引子的非线性方式格格作响。而肖开始设计一个将要占用他几年时间的实验，只用一个任何物理学家都不难设想的家常动力系统：滴水的龙头。许多人以为正规的龙头滴水是不折不扣的周期动作，但是只要做一点点实验就可以发现它并不必然如此。肖说：“这是一个系统从可预言行为转到不可预言行为的简单实例。如

果你只把它打开一丁点儿，就可以看到不规则的滴滴答答。原来，这不是短时间之后就可以预言的模式。可见，即使像龙头滴水这样简单的事情，也可以产生具有永恒创造性的模式。”

作为有组织事物的生成者，滴水龙头可供研究的东西不多。它只产生水滴，每一滴和前一滴大致相同。但是对于开始研究混沌的人，滴水龙头倒有一定的优越性。每个人心目中都有它的形象。数据流只能是一维的：按时间测量的单个鼓点的节律。所有这些性质在圣克鲁斯小组以后研究的系统中都找不到了——例如人体免疫系统，或是在北面斯坦福线性加速器中心无法解释地使碰撞粒子束性能降低的伤脑筋的束与束之间的作用。像利布沙伯和斯文尼那样的实验家得到一维数据流的方法，是在稍微复杂一些的系统中随意取一点放置探测器。而对滴水龙头，那单线数据就是所有的一切。它甚至不是连续变动的速度或温度，而只是滴了多少次的一份清单。

如果要求一位传统的物理学家来研究这样一个系统，他可能一开始先造一个尽可能完备的物理模型。控制液滴形成和脱落的过程是可以理解的，只是不像看上去那么简单。流速是一个重要变量。（相对于多数流体动力学系统，这里流速必须很低。肖通常观察每秒 1 至 10 滴的速度，这就是说每两星期约 30 到 300 加仑①。）其他变量包括液体的黏滞性和表面张力。龙头上一滴悬而未落的水珠，具有复杂的三维形状，按照肖的说法，仅仅计算这个形状就是“当代计算机的杰

① 1 加仑（美）=3 785 升。——译者

作”。更有甚者，这个形状远非静态。一粒充满水的水珠，就像一个弹性的表面张力小口袋，以某种方式振荡着，增大质量并拉伸袋壁，直到经过一个临界值而脱落。一位想完整地模拟水滴问题的物理学家，要写出耦合的非线性偏微分方程组，加上适当的边界条件，并且试图求解，这时他会发现自已落入了万丈深渊。

另一种做法是忘掉物理只看数据，就好像数据来自黑盒子。给定代表水滴间隔时间的一串数字，一位混沌动力学家是否可以说出点有用的意见？果然，可以发明一些方法来组织这类数据，并且倒着寻求原来的物理。这些方法对于把混沌用于现实世界中的种种问题是至关重要的。

但是肖选了两个极端中间的道路，相当于为完备的物理模型作了一幅“漫画”。忽略液滴形状和复杂的三维运动之后，他把液滴的物理过程作了粗略概括。他设想一个重物悬于弹簧之上，并设想重量随时间持续增长。随着重量的增长，弹簧拉长，重物位置降低。当它达到某点时，一部分重量脱离。肖随意地假定，脱落的重量严格依赖于下降的重物到达脱落点时的速度。

当然，剩下的重物将像弹簧一样反跳上去，产生研究生们用标准方程模拟过的振荡。这个模型的有趣之处，也是唯一有趣之处，以及使混沌行为得以产生的非线性扭转，在于下一次滴落依赖于弹性和持续增长的重量如何相互作用。往下跳可能帮助重物早那么一点儿到达脱落点，而往上跳可能稍稍使过程延迟。对于真正的龙头，水珠大小不完全相同。这大小既依赖于流速，又依赖于跳的方向。如果一个水珠开始其生涯时已经在往下行，它会早一些脱落。如果它恰好在反

跳时开始，那就会在脱落之前多充一些水。肖的模型粗略到可以用三个微分方程概括，就像庞加莱和洛伦兹指明的那样，这是出现混沌所需的最小方程数目。然而，它会不会像真的龙头一样地产生那么多复杂性呢？会是同一类复杂性吗？

于是，肖坐在物理楼一间实验室里，头上是一大塑料桶水，一根管子向下通到能在五金店里买到的质量最好的黄铜管嘴。每落下一滴水，它打断一次光束，隔壁的一架微型计算机就记下时间。同时肖把他的三个相当任意的微分方程放到模拟计算机上运行，产生出假想数据流。有一天他为系里的教师们作了一次表演讲解，克拉奇菲尔德把它叫做“准报告”，因为研究生们是不可作正式报告的。肖播放了一条录像带，其中拍摄了一个龙头往罐头上滴水。他同时让计算机发出清脆的响声，给耳朵指示出节律。他把问题从正反两方面都解出来了，听众们可以感受到这个看来无序的系统中的深刻结构。然而要想继续前进，这个小组就需要有办法从任何实验取得原始数据，然后回溯到刻划混沌的方程和奇怪吸引子。

对于更复杂的系统，可以设想把变量相对地画出来，例如把温度或速度的变化与时间联系起来。可是滴水龙头只提供了一串时间间隔。于是肖试用了一种技术，它可能是圣克鲁斯小组对混沌进展所作的最聪明的、最持久的实际贡献。这是重新构造看不见的奇怪吸引子的相空间的方法，它可以运用于任何数据系列。对于滴水龙头数据，肖画了一张二维的图，其中 x 轴代表一对液滴之间的时间间隔，y 轴代表下一个时间间隔。如果第一滴与第二滴之间经过 150 毫秒，然后第二滴与第三滴之间经过 150 毫秒，他就在 150—150 的位置上

打一个点。

这就是全部要做的事。如果水滴是规则的，就像水流很慢而整个系统处于“水钟制”中时，整个图很单调。所有的点都落在同一位置。图中就是一个点，或者几乎是一个点。事实上，计算机里的滴水龙头和现实的滴水龙头的首要差别，就在于后者受噪声干扰，而且异常敏感。肖开玩笑地说：“这家伙原来是架出色的测震仪，极有效地把噪声从小小的尺度放到大大的尺度。”肖不得不在夜阑人静时做实验，因为那时走廊里脚步声最轻。噪声意味着，他看到的是稍稍模糊的小团，而不是理论预言的单个点。

当流速增大时，系统经历一次倍周期分岔。液滴成对地落下。一个间隔可能是 150 毫秒，下一个可能是 80。因此图中出现两个模糊的小团，一个在 150—80 处，另一个在 80—150 处。当模式变混沌时才是真正的考验。如果它真是随机的，这些点应当散在整个图中。一个间隔和下一个间隔之间将找不出任何关系。然而，如果数据里隐藏了一个奇怪吸引子，它可能把模糊的斑点联接成可以辨别的结构，从而使自己亮相。

常常需要有三维才能看到这种结构，但这不成问题。同一技术很容易推广到画高维图。 不是把第 n 个间隔对着第 n+1 个间隔画，而是把第 n 个间隔对着第 n+1 个间隔再对着第 n+2 个间隔画。这是一个花招——一个鬼把戏。通常三维图形要求知道系统中三个独立变量。这个花招变一为三。这反映了这些科学家们的信念：有序深深渗透在表面无序之中，它必定以某种方式表现出来，甚至那些不知道应当测量哪些变量，或者不能直接测量它们的实验家们，也会看到它的出

现。正如法默所说，“当你考虑一个变量时，它的演化必然受到与它相互作用的任何其他变量的影响。它们的值也必然以某种方式包含在那个变量的历史中。不管什么原因，它们的印迹必定在那里。”在肖的滴水龙头的情形中，那些图形就说明了问题。特别是在三维，显现出的图形好像一架失控的广告飞机在天空留下的一圈圈烟迹。肖还能把从实验数据画出的图同模拟计算机模型产生的数据相匹配；它们的主要差别在于实际数据总是被噪声玷污，因而更模糊一些。即使如此，那结构也是明白无误的。圣克鲁斯小组开始和斯文尼这样有经验的实验家合作，这时斯文尼已经到了奥斯汀的得州大学。他们学会了如何从各种各样的系统中取出奇怪吸引子。事情在于把数据嵌入维数足够多的相空间中。不久，曾经同茹厄勒一起发明了奇怪吸引子的塔肯斯，独立地为这种从实际数据流中重构吸引子相空间的有力技术提供了数学基础。无数研究人员很快发现，这种技术把简单噪声同新意义上的混沌区分开来，后者是由简单过程创生的“有序的无序”。真正的随机数据总是散开成不明确的一团糟。而决定论的有一定模式的混沌，把数据拉成一定形状。在一切可能的无序方式中，大自然只喜欢很少几种。

直观教具

从造反者到物理学家的转变是缓慢的。当这些研究生在咖啡馆里坐着或在实验室中工作时，他们中的某一位不时得克服一下因为自己的科学奇想还没有告一段落而产生的惊诧。克拉奇菲尔德会说：“天哪！我们还在干这事而它还有意

义。我们还在这儿呢。它到底要走多远?”

他们在教授中的主要支持者是那位斯梅尔的徒弟，数学系的亚伯拉罕，和物理系的比尔·伯克，他把自己变成“模拟计算机的沙皇”,以便至少能保护一下这个集体对这台设备的要求。物理系的其他教授处境更为困难。几年之后，有几位教授强烈否认这个集体曾被迫克服来自系里的冷淡和反对。这个集体也对它认为是迟迟地转而相信混沌的人修正历史的那种事情作出同样强烈的反应。肖说，“我们没有导师，没有人告诉我们该做什么。好多年里我们一直处于敌手的地位，这种情况一直延续到今天。我们在圣克鲁斯从没有得到资助。我们之中每一个人都没有报酬地工作过相当长的时间。这完全是一场小本经营，没有任何知识方面或其他方面的指导。”

然而，系里还是尽可能容忍甚至帮助过一段长时期的研究，尽管它看来与任何实质性的科学没有关系。在肖从低温物理转向之后很久，他的超导方面的指导教授还给他发了一年左右工资。没有人真正命令过混沌研究停止工作。在最坏的情况下，系里只达到过好心劝阻的地步。集体的每一位成员都不时被请去谈过心。他们被警告说，即使有办法保证他们的博士学位，也没有人能帮助这些学生在一个不存在的领域里找到职业。系里会说，这可能是一阵时髦，将来你们怎么办呢?然而在圣克鲁斯山的红杉遮蔽之外，混沌正在建立自己的科学机构，而动力系统集体注定要去参加。

有一年，当费根鲍姆到处旅行讲演，解释他关于普适性的突破时，顺便来到了这里。像平常一样，他报告的内容是深奥的数学;重正化群理论是凝聚态物理小圈子里的事，这

几位学生从来没有学过。除此之外，这个集体更关心的是实际系统，而不是精巧的一维映象。同时，法默听说伯克利的数学家兰福德正在探索混沌，于是他跑去交谈。兰福德有礼貌地听完，然后瞧着法默说，他们没有共同之处。那时他正试图理解费根鲍姆。

法默想，真受不了，这家伙的眼界到哪里去了？“他在看这些小小的轨道，而我们钻进了深奥的信息论，把混沌拿出来，看它是怎么活动的，试图把测度熵和李雅普诺夫指数与更多的统计测度联系起来。”

在与法默的谈话中，兰福德没有强调普适性，只是后来法默才意识到自己没有抓在点子上。他说：“那是我的天真。普适性思想不仅是一个伟大的结果。费根鲍姆的结果还是雇用整个研究临界现象的待业大军的好办法。

“在此之前，非线性系统看来必须一个一个地具体处理。我们是想找到一种语言来使它定量化并描述它，但每件事看来还是得一件件具体处理。我们没有办法把系统分类，然后写出对整类都有效的解，就像对付线性系统一样。普适性意味着对于类中每个成员都可以找到定量上完全相同的性质、可以预言的性质。这就是它真正重要的原因。

“而这里还有一个火上加油的社会学因素。费根鲍姆用重正化的语言表述了自己的结果。他拿来了那些搞临界现象的人用得很熟练的全套方法。而这些家伙日子正不好过，因为看来已经没有剩下多少有意思的事给他们去做。他们正在到处寻找可以应用自己的百宝囊的地方。忽然间，费根鲍姆带着这百宝囊的重要应用走上前来。一下子就产生了一个学科分支。”

然而，圣克鲁斯的学生们也开始独立地制造出自己的影响。1978年仲冬，施乐公司研究中心和斯坦福大学的休伯曼在湖滨组织了一次凝聚态物理会议。动力系统集体在会上的意外出现，使他们在系里的地位上升起来。他们并没有受到邀请，但还是挤在肖的一辆被称做“奶油梦”的1959年的福特旅行汽车里赶来了。为防万一，他们带来了一些设备，包括一台大电视机和一盘录像带。当一位邀请报告人在最后时刻取消计划时，休伯曼请肖取而代之。时间正合适。混沌成了响当当的字眼，可是到会的物理学家们没有几个人知道它的意思。于是肖从解释相空间中的吸引子开始：首先是不动点（那里一切都停止了）；其次是极限环（那里一切都在振荡）；然后是奇怪吸引子（一切其他情况）。他用录像带演示了自己的计算机图象。（肖说，“直观教具给了我们一把利刃。我们可以用闪光把他们催眠。”）他阐明了洛伦兹吸引子和滴水龙头。他也解释了几何学——这些形状是如何拉伸和折叠的，这用信息论的伟大语言说又是怎么一回事。为了更好地说明，他在结束时讲了几句关于更替楷模的话。这是一场成功的科普报告，在听众中有好几位圣克鲁斯的教授，他们第一次通过自己同事们的眼睛看到了混沌。

一个时代结束了

1979年，全组都去参加了纽约科学院的第二次混沌会议，这次是作为参加者，而这时整个领域正在爆炸。1977年会议是属于洛伦兹的，参加的只有几十位专家。这次会议是属于费根鲍姆的，来了几百位科学家。就在这里，两年前肖

曾经羞涩地想找到一台打字机，以便能产生一篇论文来插到人们的门缝下面，而现在动力系统集体实际已经变成了一座印刷厂，迅速地产生文章，并且总是联名。

但是这个集体不能永远这样继续下去。越是接近现实的科学世界，他们也就越是接近散伙了。有一天休伯曼打来电话，他想找肖，但是却找到了克拉奇菲尔德。休伯曼要写一篇紧凑而简单的关于混沌的论文，需要一个合作者。克拉奇菲尔德这位集体中最年轻的成员，原来关心的是只被人们看成“雇工”，现在开始意识到在一定意义上圣克鲁斯系里的意见始终是正确的：每个学生有朝一日都要作为个人受到评估。而且休伯曼已经熟悉学生们所缺乏的关于物理职业的全部世故，特别是他懂得怎样从一件工作中榨出尽量多的油水。他看过实验室之后有点怀疑——“你知道，一切都是非常模糊，沙发和塑料食品袋，就像进了个时间机器，又回到60年代，卖花的孩子们。”但他需要模拟计算机，而事实上克拉奇菲尔德在几小时之内就使他的研究程序运转起来。然而集体成了问题。克拉奇菲尔德有一次说了一句，“所有的小伙子们都想参加这件工作”，但休伯曼说绝对不成，“这不是荣誉问题，而是责任。假定文章是错的，你能责备一个集体吗？我就不是集体的一部分。”他只需要一个伙伴来做一件干干净净的事。

结果正是休伯曼所期望的：在美国报道物理学新突破的最高期刊《物理评论通信》上发表了第一篇关于混沌的论文。在科学政治的意义上，这是个非凡成功。克拉奇菲尔德说，“对我们来说，那篇文章是相当明显的，但休伯曼明白它会产生巨大冲击。”这也是小组与现实世界同化的开端之一。法默生了气，认为克拉奇菲尔德的背叛破坏了集体精神。

克拉奇菲尔德并不是唯一往组外走的人。不久，法默本人和帕卡德也都在和成熟的物理学家和数学家休伯曼、斯文尼、约克合作。在圣克鲁斯大锅中融成的思想变为当代动力系统研究框架的坚实组成部分，当一位物理学家带着一大堆数据要研究它的维数或熵时，那就要用到在圣克鲁斯模拟计算机上插电线瞧示波器的年月里所发展的定义和技术了。气象学家们会争论全球大气和海洋的混沌是否像传统的动力学家们假定的那样具有无穷的维，还是以某种方式跟随一个低维的奇怪吸引子。分析股市数据的经济学家们会试图发现维数是 3.7 或 5.3 的吸引子。维数越低，系统越简单。许多数学特殊性还有待清理和理解。分维、豪斯道夫维数、李雅普诺夫维数、信息维数——法默和约克对混沌系统的这些测度的微妙性作了最好的解释。吸引子的维数是“为刻划它的性质所必需的第一层知识”。它是给出“以一定精度确定一个点在吸引子上的位置时所必需的信息量”的特性。圣克鲁斯的学生和他们年长的合作者们所用的方法，把这些思想与系统的其他重要测度紧密联系起来：可预言性的衰减速率、信息流通率、产生混合的趋势。使用这些方法的科学家们有时要标出数据、画小盒子和数出每个盒子里的数据点数。然而甚至这些看来很粗糙的技术，也第一次把混沌系统纳入了科学理解所及的范围内。

而现在，在学会了从飘荡的旗子和格格作响的速度计里寻找奇怪吸引子之后，科学家们决心从全部当代物理文献中寻找决定论混沌的表征。无法解释的噪声、令人吃惊的涨落、规则性与不规则性混合——这些效应都从实验家的论文中涌出来，他们的工作对象包括了从粒子加速器到激光器到约瑟

夫森结的一切东西。混沌专家们也把这些表征据为己有，告诉那些还没有转变过来的人说，你们的问题就是我们的问题。一篇论文的开头可能说，“关于约瑟夫森结振荡器的几个实验揭示了惊人的噪声增强现象，这是不能用热涨落来解释的。”

等到集体离散的时候，圣克鲁斯已经有几位教授也转入了混沌。但是其他物理学家们在回顾往事时感到，圣克鲁斯耽误了开始成为国家非线性动力学工作中心的机会．这样的中心不久就开始在其他校园中出现。到了80年代初期，集体的成员先后毕业并分开。肖在1980年结束了论文，法默在1981年，帕卡德在1982年。克拉奇菲尔德的论文在1983年出来，这是一本印刷大杂烩，它把若干打字页和至少11篇已经在物理和数学杂志上发表的论文装订在一起。他到伯克利加州大学去了。法默参加了洛斯阿拉莫斯的理论部。帕卡德和肖到了普林斯顿高等研究所。克拉奇菲尔德研究视频反馈回路。法默研究“胖分形”，并模拟人类免疫系统的复杂动力学。帕卡德探索空间混沌和雪花形成。只有肖看来不愿加入主流。他自己有影响的著作只有两篇，一篇曾经为他赢得了一趟巴黎旅行，另一篇是关于滴水龙头的，其中总结了他在圣克鲁斯的全部研究。有好几次，他差点完全离开科学。像他的一位朋友所说的，他还在摇摆。

11 内部节律

各门科学并不想作说明，甚至也不想作解释，而主要是制造模型。模型就是一种数学构造，它加上一定的语言解释，描述观察到的现象。这样一种数学构造所以正当，只是并正是在于期望它能起作用。

——冯·诺伊曼

对模型的一种误解

休伯曼望着由理论和实验生物学家、纯数学家、内科医生和精神病学家组成的混合听众，意识到语言沟通有问题。他刚刚在1986年的一次不寻常的集会上结束了一个不寻常的报告，这是在纽约科学院、国家精神保健研究所、海军实验室资助下召开的第一次有关生物学和医学中的混沌的重

要会议。在华盛顿郊外国家卫生署洞穴般的讲演厅里，休伯曼看到了许多熟识的面孔，老资格的混沌专家们，同时也有很多不熟悉的人物。有经验的报告人会预期听众有些不耐烦了——这是会议的最后一天，而且又危险地接近午餐的时间。

休伯曼是从阿根廷移居加州的一位黑发的衣冠楚楚的人，自从与圣克鲁斯那帮人合作以来，一直保持着对混沌的兴趣。他是施乐公司研究中心的研究员。但有时他也涉猎于与公司使命无关的研究计划，这次在生物学会议上刚描述完其中之一：精神分裂症患者眼睛乱动的一个模型。

精神病学家们奋斗了几代人的时间，力图定义精神分裂症并把精神分裂症患者分类，但是此病的描述几乎和治疗同样困难。它的多数症状表现在思维和行为中。然而从 1908 年起，科学家们知道了这种病症的一种物理表现，它看来不仅折磨着病人，也折磨着他们的亲属。当病人试图注视慢慢摆动的摆时，他们的眼睛不能跟踪那平滑的运动。在正常情况下，眼睛是极为敏捷的工具。健康人的眼睛不需任何有意识的思想就可以锁定在运动目标上；运动形象在网膜上冻结不动。然而精神分裂症患者的眼睛总是间断地跳小步子，或者超过或者落后于目标，从而造成一种对外界运动的固定的朦胧感觉。没有人知道为什么。

生理学家们历年来积累了大量数据，用表和曲线来表示不规则眼睛运动的模式。他们一般假定这种涨落来自控制眼肌的中央神经系统的信号涨落。噪声输出意味着噪声输入，或者某些使精神分裂症病人的大脑受折磨的随机扰动表现在眼睛上。物理学家休伯曼作了不同的假定，并且造了一个适度的模型。

他以尽可能粗糙的方式考虑眼睛的力学，并且写出一个方程。方程中一项代表摆的振幅，一项代表它的频率，一项代表眼睛的惯性，一项代表阻尼或摩擦力。还有一些项是修正误差用的，以便使眼睛可以锁定在目标上。

休伯曼向听众解释说，这样得到的方程还可以描述一个类似的力学系统：一个小球在弯曲的槽中滚动，而槽自己又在向左右两边摆动。这种左右运动对应于摆的运动，而槽壁对应于修正错误的功能，它趋向于把球推回中心。按照当前研究这种方程的标准方式，休伯曼把他的模型放到计算机上去运行了几小时，改变不同的参数并且作图表示所得的行为。他发现有序和混沌两者都有。在有些情况下，眼睛可以平稳地跟踪；当非线性增大之后，系统很快经过一个倍周期序列，然后产生一种与医学文献中报道的无序不可区分的无序。

在这个模型里，无规行为与外部信号没有任何关系。它是系统中非线性太多所造成的不可避免的后果。对于某些听讲的大夫，休伯曼的模型看来与精神分裂症的一种可能的遗传模型一致。因强弱不同而可能使系统稳定或瓦解的非线性，可能对应于单一的遗传特性。一位精神病学家把这种概念与痛风病的遗传学作了比较，这种病的病理症状是由尿酸水平太高引起的。另外一些比休伯曼更熟悉临床文献的人指出，精神分裂症患者不是单独的；在各种不同的神经病人中可以发现范围很广的眼睛运动问题。周期振荡，非周期振荡，各种各样的动力学行为在数据中都有，任何人只要把混沌工具用到数据上就能发现。

每一位在座的科学家都看见眼前展开了新的研究路线，但也有人怀疑休伯曼过分简化了他的模型。到了提问时，他

们的烦恼和失望就都倒出来了。一位科学家说，“我的问题是，什么东西指导你构造了这个模型？为什么要找非线性动力学中的这些特殊成分，即这些分岔和混沌解？”

休伯曼停顿了一下说：“噢，那好。看来我没有把目的讲清楚。模型是简单的。有一个人来跟我说，我们看到了这个，你想想是怎么回事。于是我说，好吧，什么是可能的解释呢。他们说唯一能想到的是头脑中在这么短的时间内涨落着的东西。我接着说，瞧，我是个混沌家，我知道你能写出来的最简单的非线性跟踪模型，最简单的，就会有这种一般的特性，而与这些东西的细节无关。于是我做了这件事，而人们说，很有趣，我们从来没有想过或许这就是系统中的内在混沌。

“模型中没有任何我可以为之辩护的神经生理数据。我所说的是，最简单的跟踪模型会倾向于出错后又归到零。这就是我们动眼睛的方式，也是天线跟踪飞机的方式。你可以把这个模型用到任何事情上。”

另外一位生物学家走出来拿起话筒，他还在为休伯曼模型的过于简单而失望。他指出，在真实的眼睛中，四个控制肌肉的系统同时操作。他开始高度技术性地描述现实的模型应当如何，例如，他解释说由于眼睛是高度阻尼的，可以把质量项省去。“而这里还有一条附加的复杂化，即质量与转动速度有关，因为眼睛很快加速，而一部分质量落在后面。当眼球外壳运动很快时，里面的眼液跟不上。”

没有人说话，休伯曼处于困境。最后，会议组织者之一曼德尔，一位对混沌有长期兴趣的精神病学家，接过话筒。

“瞧，我想作为神经科大夫来给点解释。你们刚才看到的，就是一位研究低维整体系统的非线性动力学专家同一位一直

在使用数学工具的生物学家谈话时发生的事情。事实上在不同的系统里存在着普适性质，在最简单的表示里就有，这种思想反而使我们彼此疏远。所以问题是‘什么是精神分裂症的子类型’，‘有四个眼动系统’，以及‘从实际物理结构出发的模型应当如何’，结果越来越远了。

“实际情况是，内科医生或科学家们记住了每个事物的全部5万个零件，结果我们抱怨起运动实际上有普适成分这种可能性来了。休伯曼拿来了一个例子，以便看看情况如何。”

休伯曼说，“5年前在物理学里也发生过这种事儿，不过他们现在信了。”

复杂的人体

选择永远是相同的。你可以把模型搞得更复杂，更忠于现实，或者你可以使它更简单，更易于处理。只有最天真的科学家才相信，完美的模型是完全代表现实的模型。这种模型的缺点同一张与所表示的城市一般大而详细的地图一样，图里画上了每个公园，每条街，每个建筑物，每棵树，每个坑洼，每个居民，以及每张地图。即使可能造这样的地图，它的特殊性也会破坏它的目的性：概括和抽象。地图制作者突出他们的用户所选择的特色。不论它们的目的如何，地图和模型在模仿世界时必须简化。

对于圣克鲁斯的数学家亚伯拉罕来说，拉夫洛克和马古里斯的“菊花世界”是一个好模型。这两位是所谓“加亚(Gaia)假说”的支持者，这一假说认为生命所需的条件是由生命自身通过一个自我维持的动力学反馈过程创造和保持

的。菊花世界或许是最简单的可以设想的加亚方案，简单到近乎愚蠢。照亚伯拉罕的说法，“只有三种东西：白菊花、黑菊花和没有植被的沙漠。三种颜色：白、黑和红。这如何能教给我们一些关于我们这颗行星的事呢？它说明温度调节是怎样发生的。它解释了为什么在这个行星上温度适宜于生命。菊花世界模型是个可怕的模型，但它告诉我们地球上怎样建立起生物的体内平衡。”

白菊花反射光线，使行星变冷。黑菊花吸收光线，降低反照率或反射率，使行星变暖。然而白菊花“要”温暖天气，也就是说温度上升时它们优先生长。黑菊花要寒冷天气。这些性质可以表示成一组微分方程，菊花世界可以放到计算机上转起来。很宽的初始条件范围会导致平衡吸引子，而且不必是静态平衡。

亚伯拉罕说，“这只是一种概念模型的数学模型，而这正是你所要的——你并不需要高保真度的生物或社会系统模型。你只要设置反照率和初始的植被，然后就观察几十亿年怎样演化过去。这样你就会把儿童们教育成行星董事会的更好成员。”

人体是复杂动力系统的典范，因此对于许多科学家来说，也是任何处理复杂性方法的试金石。物理学家没有任何一个研究对象能提供这样从宏观到微观的、不同尺度的各种对抗节律的大合奏：肌肉、流体、电流、纤维、细胞的运动。也没有一个物理系统受到过如此迷人的约化：每个器官有自己的微结构和化学，仅仅为了记住各部分的名字，生理系学生就要花几年功夫。而这些部分又是何等难以掌握！最有形的人体器官可以是像肝脏这样的看来定义得很好的器官。它也

可以是像血管系统这样一个充满空间的固体和液体的网络。它也可以是像免疫系统这样的看不见的集合体，真像“电讯”或者“民主”一样抽象的东西，还具有淋巴细胞和 T4 信使，以及微型化的密码机来对入侵生物体编码和译码。不具备解剖学和化学的详尽知识，要研究这样的系统真是枉费心机，因此心脏专家们要学习通过心室肌肉组织的离子输运，脑科专家要懂得神经元动作时的电特性，而眼科专家要知道每一条眼肌的名称、位置和功能。在 80 年代，混沌带来了一种新的生理学。它基于这样一种思想，即数学工具可以帮助科学家们从整体上理解复杂系统，而与局部细节无关。研究人员们越来越认识到，人体是充满运动和振荡的地方，他们研究出了倾听它的种种鼓点声的方法。他们发现了在冰冻显微镜玻璃片上或每日血液采样中看不见的节律。他们在呼吸系统失调中研究混沌。他们探索在红、白血球控制中的反馈机制。癌症专家们思索着细胞生长循环中的周期性和不规则性。精神病学家们研究抗抑郁药物处方的多维方法。然而，对于一个器官的惊人发现统治了这门新生理学的上升，这个器官就是心脏，它的生气勃勃的节律，不论是稳定的还是不稳定的，健康的还是病理的，都如此准确地测量着生与死的差别。

动力学的心脏

甚至于茹厄勒也曾经偏离了形式体系去思索心脏中的混沌。他写道，这是“对我们每个人都具有生命攸关的意义的一个动力系统”。

“正常的心脏节律是周期性的，但是有许多非周期的病理

状态（像心室纤维性颤动），它们导致死亡这个定态。看来对于能再现不同的心脏动力学状态的一个现实的数学模型进行计算机研究，会在医学上获得重大好处。”

美国和加拿大的几个研究组接受了挑战。心搏的不规则性的发现、研究、识别和分类由来已久。经过训练的耳朵可以区分几十种不规则的节律。对于经过训练的眼睛，心电图的尖峰模式为不规则节律的来源和严重程度提供线索。外行人从各种心律不齐的众多名称就可以估量出问题有多丰富。有异位搏动、电性变化和点（投射）扭曲。有深度阻滞和逃逸节律。有异常收缩（房性或室性，纯粹的或调节过的）。有温克巴赫节律（简单型或复杂型）。有心动过速。对于生存前景威胁最大的是纤维性颤动。这样为各种节律起名字，就像为各种零件命名一样，使医生们感到安逸。它使得诊断有毛病的心脏时可以具体化，而且使问题带上学术色彩。但是使用混沌工具的研究者们开始发现，传统心病学对于不规则的心搏作出了错误概括，无意中用表面上的分类模糊了深刻的原因。

他们发现了动力学的心脏。他们的背景几乎总是不同寻常的。蒙特利尔麦吉尔大学的格拉斯所受训练是物理和化学，他也沉湎于数字和不规则性；在转向不规则心搏问题之前，他完成了关于液体中原子运动的博士论文。他说，典型情况是专家们观察短短几段心电图，就诊断出许多不同的心律不齐。“医生们把它作为模式识别问题来处理，即确认一些他们过去在实习中或在教科书中看见过的模式。他们实际上并不细致分析这些节律的动力学。这种动力学要比任何人从读教科书所能猜知的丰富得多。”

在哈佛大学医学院，波士顿伊斯雷尔医院心律不齐实验室的一位主任戈德伯格相信，心脏研究是生理学家、数学家和物理学家们合作的开端。他说，“我们处在一个新领域，一类新现象就在那里。当我们看到分岔和行为突变时，普通的线性模型里没有任何东西能给予说明。很清楚，我们需要一类新模型，而物理学看来正在提供。”戈德伯格和其他一些科学家曾必须克服科学语言和机构划分上的隔阂。他觉得，一种相当严重的障碍在于许多生理学家们对数学反感。他说：“1986 年你在任何一本生理学书中找不到分形这个词。我想 1996 年你会找不到一本没有这个词的生理学书。”

倾听心搏的大夫会听到流体碰流体、流体碰固体、固体碰固体的流动声和撞击声。血液从腔室流到腔室，被后面收缩的肌肉挤压，接着又撑开前面的管壁。听得见纤维瓣膜猛然关起来挡住回流。肌肉收缩本身又依赖于复杂的电活动三维波形。模拟任何一部分心脏行为都会使超级计算机不堪负担；模拟互相交织的整个循环则根本不可能。在为波音公司设计机翼或者为美国宇航局设计飞行器的流体动力学专家们看来很自然的那种计算机模拟，对于医学技术专家来说完全是不同的实践。

例如，试错法曾统治了人工心脏瓣膜的设计，这些金属和塑料的部件，延长了那些天然瓣膜遭到磨损者的寿命。在工程编年史中应当为大自然自己的心脏瓣膜留下特别的地位，这是一个薄薄的、柔韧的、半透明的由三个小小的降落伞式的杯状物组成的装置。为了让血液流进心脏的泵室，这瓣膜必须优美地折叠起来留出通路。为了在心脏往前泵血时挡住回流，它又必须在压力下关紧，而且它必须不漏不裂地

关二三十亿次。人类工程师从来没有这样好地工作过。人工瓣膜大体上是从管子工那里借来的：像“笼中球”那样的标准设计，是花很大代价在动物身上试出来的。泄漏和应力断裂这些明显问题很难克服。很少人会预料到排除另一个问题将有多么困难。由于改变了心脏中的流体运动模式，人工瓣膜产生湍流区和滞流区；血液停滞时形成凝块；当凝块脱落运行到大脑时，就造成中风。这类凝块是制造人工心脏的致命障碍。直到80年代中期，当纽约大学库朗研究所的数学家们使用新的计算机模拟技术于这问题之后，心脏瓣膜的设计才得以采用全部现有的先进技术。他们的计算机产生跳动中的心脏的图象，图象是二维的，但是生动可认。几百个小点，代表着血液中的颗粒，从瓣膜流过，撑开富有弹性的心壁并形成转圈的涡旋。数学家们发现心脏为标准的流体运动问题增添了整整一层复杂性。因为任何现实的模型必须计及心壁本身的弹性。不像机翼上面的空气那样流过硬性表面，血液以动力学方式、非线性地改变心脏表面。

心律不齐问题甚至更为细致，而且致命得多。仅仅在美国，每年就有几十万猝死系由心室纤维性颤动所致。在许多这类情形中，纤维性颤动有一种特别的熟知的触发机制：动脉阻塞，导致泵动肌肉的死亡。服用可卡因、精神紧张、体温过低——这些原因也都能促使一个人发生纤维性颤动。在许多情形中，纤维性颤动的开始仍然是神秘的。面对着一位在纤维性颤动后幸存的病人，大夫更愿意查看损伤——出事的原因。心脏看起来健康的病人事实上更容易再次发作。

对于纤维性颤动的心脏有一个经典的隐喻：一口袋蠕动的虫子。心脏肌肉组织的动作不是收缩和放松，不是以一种

重复和周期的方式收缩和放松，而是不协调地扭动，因此根本无法泵血。在正常跳动的心脏中，电信号作为协调一致的波经过心脏的三维结构。当信号到达时，每个细胞收缩。然后每个细胞都在一个临界的不响应期内放松，在这段时间里它不能过早地再次被启动。在纤维性颤动的心脏中，信号波破碎了。心脏不再全部收缩或全部放松。

纤维性颤动的一个令人迷惑不解的特点，是心脏的许多个别元件都能正常工作，往往心脏起搏的结点继续放出规则的电脉冲。单个的肌肉细胞仍可正常响应。每个细胞接受刺激，收缩，把刺激传下去，放松并等待下一个刺激。在尸体解剖中往往发现肌肉组织没有任何损伤。这正是混沌专家们认为必需用新的、整体考虑的理由之一：纤维性颤动心脏的各部分看来还是在工作的，而整体上出了差错。纤维性颤动是复杂系统的失调，正像精神失常——不论有无化学上的根源——是复杂系统的失调一样。

心脏自己不会自行停止纤维性颤动。这种混沌是稳定的。只有从除纤颤器来的电击可以使心脏恢复到定态，任何动力学家都明白这电击是一次强扰动。从整体上说，除纤颤器是有效的。但是同人造瓣膜一样，它们的设计曾要求许多苦心猜测。理论生物学家温弗里说，“确定这种电击的长短和形状完全凭经验。什么理论也没有。而现在看来有些假定还是不对的。原来，除纤颤器的设计还可以大为改进以便把效率提高许多倍，这也就是把成功的机会提高许多倍。”对于其他反常的心脏节律已经尝试了各种药物配方，主要也是基于试错法，即温弗里所说的“暗中摸索的艺术”。缺乏对心脏动力学的彻底的理论上的理解，要预言药物的效用是靠不住的。“最

近 20 年在阐明膜生理学的许多本质性的细节方面成绩斐然，这涉及心脏所有零件的非常复杂的精确细致的工作机制。这门学问的主要方面情况很好。被忽视的是另一方面，即寻求它究竟怎样工作的整体性认识。”

校正生物钟

温弗里来自一个谁也没上过大学的家庭。他说，他就是从没有受正式教育开始的。他的父亲从人寿保险业的底层升到副总裁，几乎每年都要把全家沿着东海岸搬来搬去，使温弗里在高中毕业前上过十几所学校。他产生了一种感觉，认为世界上有趣的事都与生物学和数学有关，同时又有另一种感觉，认为两门学科的任何标准组合都不能公平对待有趣的东西。于是他决定不走标准的路。他在康奈尔大学学了 5 年工程物理，学习了应用数学和整套动手做实验的风格。为了准备受雇于军工企业集团，他取得了生物学博士学位，努力追求把实验与理论结合的新方式。他在约翰·霍普金斯大学开始工作，由于和系里冲突而离去；接着到普林斯顿大学，又因和系里冲突而离开；最后，当他已经在芝加哥大学教书时，总算远距离地从普林斯顿大学拿到一个学位。

温弗里是生物界里少有的那种思想家，他的生理学工作带有强烈的几何意识。70 年代初期，他从生物钟——心脏节律——开始探索生物动力学。这是传统地被博物学家的方法统治的领域：这种动物有哪种节律，如此等等。按温弗里的观点，心脏节律问题应当适宜于数学思维风格。“我满脑袋都是非线性动力学，我意识到能够而且应当用这种定性语言想

问题。生物钟的机制是什么，没有人有任何想法。因此你有两种选择。你可以等到生物化学家来弄清楚钟的机制，然后试图从已知机制推导出某种行为。或者你可以开始用复杂系统理论和非线性及拓扑动力学来研究钟如何工作。我走了后一条路。”

有一段时间他有一间满是蚊子笼的实验室。每个露营过的人都知道，蚊子一到傍晚就活跃起来。在这间温度和亮度保持恒定的实验室里，蚊子被同昼夜变化隔离开，结果它们的内部周期不是 24 小时，而是 23 小时。每隔 23 小时它们就特别起劲地嗡嗡叫一通。使它们与室外保持联系的是每天一次光冲击；事实上，这校正了它们的钟。

温弗里对蚊子施以人工照明，并仔细调节了照明程度。这些刺激的周期或者超前，或者推迟，他把效果与光冲击时间的关系画成图。这样，他不是去猜测所涉及的生物化学过程，而是拓扑地看问题，即注意数据的定性形状，而不管定量细节。他得到一个惊人的结论：在几何形状中有一个奇点，即与其他所有的点不同的一个点。根据这个奇点，他预言用一种特别的、精确定时的光冲击可以完全搞乱蚊子的生物钟，或者任何其他生物钟。

这个预言是惊人的，但温弗里的实验证实了它。“你半夜里走到一只蚊子面前，给它一定量的光子，这特别定好时的冲击就关掉了蚊子的钟。此后它成了失眠症患者——它打一会儿盹，又嗡嗡叫一阵，全是随机的；只要你有耐心观察，它就一直这样干下去，或者直到你给予另一次冲击为止。你可以不断地给予它那种在高速飞行时引起的生理节奏的破坏。”在 70 年代初期，温弗里对心脏节律的数学处理没有引起多少

普遍兴趣，他的实验技术也难以推广到其他不能在小笼子里一次待几个月的物种。

人类的由高速飞行引起的生理节奏的破坏和失眠症仍然属于生物学上没有解决的问题。两者都使最坏的庸医靠那些没有用的药丸和秘方赚了钱。研究者们积累了大量人类数据，通常来自那些大学生、退休人员或者想写完剧本的剧作家们，他们愿意每周接受几百美元去生活在“时间隔离”状态中：没有日光，没有温度变化，没有钟表，没有电话。人们具有睡眠－清醒循环和体温循环，两者都是在小扰动后可以恢复的非线性振子。在隔离状态，没有每天的校正刺激，温度循环看来变成约 25 小时，在睡眠时达到最低值。但是德国研究者发现，几星期之后睡眠－清醒循环将与体温循环脱节而变成无规的。人们会一次清醒 20 或 30 小时，然后睡眠 10 或 20 小时。被试者自己不仅不知道他们的日子变长了，而且在告诉他们之后还拒绝承认。但是直到 80 年代中期，研究者们才开始对人类采用温弗里的系统方法，从一位晚上在一排排亮灯下刺绣的老太太开始。她的循环变化激烈，而她报告说感觉极佳，就好像是在乘坐一辆底朝天的汽车。而温弗里呢，他转向了心脏节律的主题。

事实上，他本人不会说“转向”。对温弗里来说，那是同一个主题——不同的化学，相同的动力学。然而，在无能为力地亲眼目睹了两例心脏猝死之后，他对心脏产生了特别的关注。在这两例中，一个人是夏天度假的亲戚，另一个人是在游泳池里，当时温弗里也在那里游泳。为什么保持了一生之久的节律，不间断地循环了 20 亿次或更多次，经过放松和拉紧，加速和减速，会突然破坏成失控的、致命的、无效的

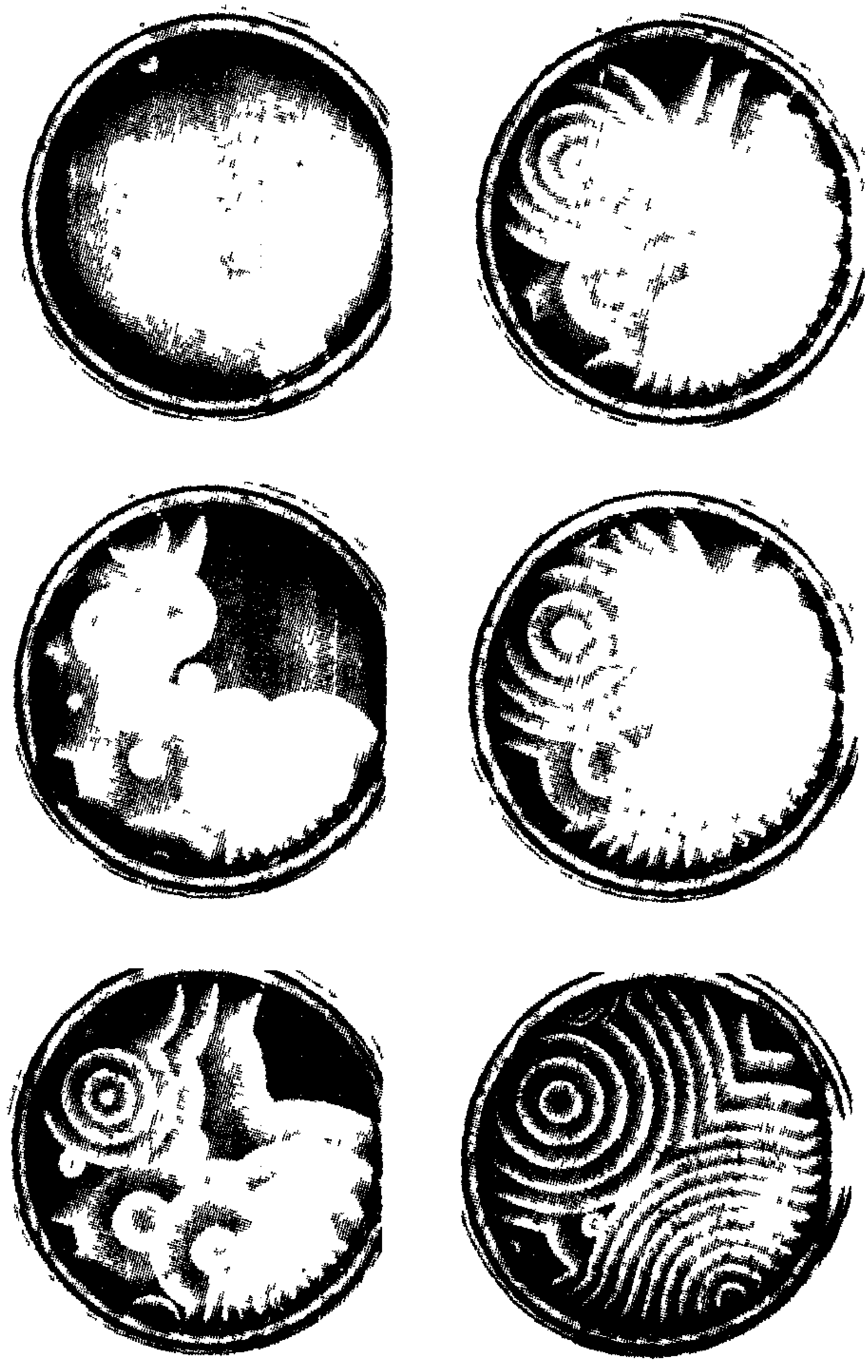


图 11 1 **化学混沌**

在广泛研究的一种化学反应即别洛乌索夫—札保金斯基反应中，以同心圆甚至螺线波向外传播的波是混沌的征兆。在装有几百万变形虫的培养皿中也见到过类似的花样。温弗里从理论上论述，这类波与心脏肌肉中规则或混乱的电活动波类似。

狂乱颤动呢？

致命的心律不齐

温弗里讲过一位早期研究者的故事，那是1914年，28岁的迈因斯在蒙特利尔麦吉尔大学的实验室里做了一个小器件，它可以对心脏发出小小的、准确调节的电脉冲。

温弗里写道，“当迈因斯认定到了开始对人类做实验的时候，他选择了最容易得到的实验对象，即自己。那天晚上大约6点钟，一个觉得实验室内反常地安静的看门人走进房间。迈因斯在一堆缠绕着的电气设备包围中躺在凳子下面。他的胸口心脏部位上接着一个不完整的机械装置，旁边一台仪器还在记录着颤抖的心搏。他没有恢复知觉就死去了。”

可以猜想，一个小小的准确计时的冲击能使心脏产生纤维性颤动，而事实上迈因斯在死前不久已经猜到这一点。另一些冲击可以使下一次跳动提前或推迟，正如同心脏节律本身一样。但是心脏与生物钟之间有一个差别，一个甚至在简化的模型中也不能置之不理的差别，那就是心脏具有空间形状。你可以把它拿在手里。它可以通过一个三维电波。

然而，要有独创性才能这样做。杜克大学医学中心的爱德克在1983年的《科学美国人》上读到温弗里的一篇文章，注意到关于诱发和终止纤维性颤动的四项特别的预言，它们都基于非线性动力学和拓扑学。爱德克不大相信。它们看来太投机，而且从心脏病专家的眼光看，又很抽象。在三年之中，所有四项预言都被检验和证实，于是爱德克开始了一个先进的计划来搜集为开展心脏的动力学研究所必需的更丰富

的数据。温弗里说，这就是“作为心脏等同物的一种回旋加速器”。

传统的心电图只提供粗略的一维记录。在作心脏手术时，大夫可以把一个电极放到心脏各个部位，在 10 分钟内探测 50 到 60 个点，这样来产生一幅合成图。纤维性颤动时不能用这种办法。心脏的变化和抖动快得多。爱德克的技术严重依赖于计算机实时处理，要把 128 个电极嵌在一个网内，而这个网可以套在心脏上，就像给脚穿上袜子。电极记录下来每一电波经过肌肉时的电压场，计算机产生一张心电图。

除了检验温弗里的理论思想，爱德克的近期意愿是改进用来停止纤维性颤动的电器件。急救小组都带着标准的除纤颤器，随时准备通过患者胸腔送去一个强直流脉冲。在实验中，心脏病专家们已经发展了一种小小的可植入器件，用来缝在被认为特别危险的病人的胸腔内，不过确认这样的病人还是一个难题。一个可植入除纤颤器比起搏器略大一些，它在那里等待着，倾听着平稳的心跳，直到必要时释放出一个电脉冲。爱德克开始把必需的物理理解汇总起来，以便使除纤颤器的设计从高价猜谜变得更为科学。

鸡胚胎和反常搏动

为什么混沌的定律可以用于心脏？须知心脏具有特别的组织——形成互相连接的分支纤维的细胞，钙、钾和钠离子在其中输送。这是使麦吉尔大学和麻省理工学院的科学家们伤脑筋的问题。

格拉斯和他在麦吉尔大学的同事格瓦拉和施里尔进行了

在非线性动力学的短短历史中人们谈论最多的研究项目之一。他们从 7 天的鸡胚胎中取出细小的心肌细胞集团。这些细胞小球，每个直径约为 1/200 英寸，放在盘子里并且摇到一起后，开始以大约每秒一次的速率自发地搏动，这时根本没有用外界起搏器。在显微镜下可以清楚地看到这种脉动。下一步就是把外部节律也加上。麦吉尔大学的科学家们使用微电极，即一条细细的玻璃管，头上拉成一点并插入一个细胞之内。电位经过细管以可以随意调整的强度和节律刺激细胞。

在 1981 年的《科学》杂志上，他们把自己的发现总结如下："过去在数学研究和物理实验中见过的奇异的动力学行为，一般说来，也存在于受到周期扰动的生物振子中。"他们看到了倍周期——当刺激改变时搏动模式一次又一次分岔。他们画庞加莱映象和圆映象。他们研究了阵发混沌和锁模。格拉斯说，"在刺激和一小块鸡心之间可以建立许多不同的节律。使用非线性数学，我们能极好地了解不同的节律和它们的排序。直到现在，心脏病专家的训练中几乎没有数学。但是我们目前看问题的方式，将来有朝一日也会成为人们必须用的方式。"

同时，在哈佛大学和麻省理工学院的一项卫生与技术联合研究计划里，心脏病专家兼物理学家理查德·科恩也在用狗做实验时发现了倍周期序列。他利用计算机模型试了一种看来可信的方案，使电活动的波前在组织的岛屿上破碎。他说，"这是清清楚楚的费根鲍姆现象，一种规则的现象在一定条件下变成混沌的。原来心脏的电活动与其他发生混沌行为的系统有许多类似之处。"

麦吉尔大学的科学家们还回到对各种反常心搏积累的老

数据。有一种熟知的综合症，其中反常的异位搏动和正常的窦动相间出现。格拉斯和同事们考察了多种模式，数出了异位搏动之间的窦动次数。有些人的这些数据会变，但由于某种原因，它们总是奇数：3或5或7。另外一些人的正常搏动的次数总是下述序列的一部分：2，5，8，11……。

格拉斯说，“人们已经作过这些神秘的数字观察，但其中的机理却不很容易明白。在这些数里经常有某种规则性，同时也经常出现很大的不规则性。我们这个事业有一个术语：混沌中的有序。”

传统上关于纤维性颤动的思想有两种。一种经典的思想是，从心肌本身内一些反常中心来的次级起搏信号与主信号发生冲突。这些小小的异位中心放出间隔不整的波来，它们的相互作用和交叠被认为破坏了协调的收缩波。麦吉尔大学科学家们的研究为这种思想提供了一些支持，因为他们证明了，由于外部脉冲和心组织内在节律之间的相互作用，可以产生一整串动力学失调行为。但是，为什么会首先产生这些次级起搏中心，仍然难以解释。

另外一种做法不是集中注意于电波的发生上，而是集中于它们传过心脏的地理通路上。哈佛和麻省理工学院的研究人员比较靠近这一传统。他们发现波动中的一些反常，紧接着会转回来而导致“再入”现象，即某些区域过早地开始新的搏动，妨碍了心脏暂停一个安静的间隔，而这是保持协调的泵动作所必需的。

由于强调了非线性动力学的方法，两组研究人员都能利用这种认识：某个参数的小小变化——时间间隔或者电导的变化，可以把一个在其他方面健康的系统推过分岔点，进入

定性的新的行为。他们还开始为从整体上研究心脏问题找到了共同基础，把那些过去被认为是无关的失调联系起来。温弗里还进一步认为，尽管注意的焦点不同，异位搏动学派和"再入"学派两者都是正确的。他的拓扑方法提示，这两种思想可能是相同的。

温弗里说，"动力学的事物一般与直觉相违，心脏也不例外。"心脏病专家们希望，这些研究能导致一套科学方法，以便识别那些有纤维性颤动危险的人，设计除纤颤器，和开药方。温弗里还希望，这类问题的整体的、数学的前景，会孕育出一门在美国几乎还不存在的科学——理论生物学。

混沌是健康

现在，一些生理学家开始谈论动力学疾病：系统失调，协调或者控制的破坏。一种表述是，"那些正常振荡的系统，停止振荡或者开始以一种新的出乎意料的方式振荡；那些在正常情况下不振荡的系统，开始振荡"。这类综合症包括呼吸失调：气喘，气哮，切恩－斯托克斯呼吸，婴儿窒息——与婴儿猝死综合症有关。还有动力学的血液失调，包括一种白血病，它破坏了白血球和红血球，以及血小板和淋巴的平衡。有些科学家猜测，精神分裂症本身可能和某些抑郁症一起属于这一类。

但是生理学家们也开始把混沌看作健康。早就知道反馈过程中的非线性实现调节和控制。简单说，轻推一个线性过程，它会保持稍离原轨。而非线性系统受到同样的轻推，倾向于回到初始点。17 世纪的荷兰物理学家惠更斯，曾经帮助

发明了摆钟和经典的动力科学，他也碰上了这种调节的一个伟大的实例——至少标准的故事是这样传说的。惠更斯有一天注意到一组靠墙放的摆钟恰巧以完美的同步合唱方式摆动。他知道这些钟不会那么准。当时关于摆的数学描述里，没有任何东西可以解释有序从一个摆到下一个的这种神秘传播。惠更斯正确地猜测，这些钟是被通过木头传递的振动协调起来的。这种一个规则周期锁到另一个上的现象，现在称为锁频或锁模。锁模可以解释月亮为什么总是面向地球，或者更一般地，为什么人造卫星的自旋周期总与它们的轨道周期呈整数比：1 比 1，或 2 比 1，或 3 比 2。当比值接近整数时，卫星潮汐吸引中的非线性就把它锁定了。电子学里经常发生锁模。例如，它使一个无线电接收机可以锁定在一些信号上，甚至当它们的频率中存在着小涨落时也是如此。锁频使得成组的振子，包括心细胞和神经细胞这样的生物振子，能够同步工作。自然界中的一个壮观实例，是东南亚的一种萤火虫在交尾期聚集在树上，成千上万虫子以奇妙的谐和同时闪光。

所有这些控制现象的一个关键问题是它们的坚定性，即系统抵抗小冲击的本领有多高。在生物系统里同样关键的是灵活性：一个系统在一段频率范围内发挥作用的本领如何。锁到单一模式上可能意味着奴役，它阻止一个系统去适应变化。生物体必须响应快速而不可预见地变化的环境；没有任何心搏或呼吸节律可以锁到最简单的物理模型的严格周期性上，身体上其他部分的更细微的节律也是这样。某些研究者，包括哈佛医学院的戈德伯格，建议健康动力学应以分形的物理结构为标志，就像肺里的细支气管的分支网络和心脏里的传

导纤维，它们允许有变化范围很宽的节律。想到肖的论据，戈德伯格说："与多尺度、宽频带相联系的分形过程是'富信息'的。相反，周期状态反映很窄的频带，由单调的重复序列定义，是缺乏信息内容的。"他和其他一些生理学家们建议，这类失调的治疗可能要依靠扩展系统的频谱储备，使它能跨越许多不同的频率而不落入锁定的周期频道。

圣迭戈的那位精神病学家和动力学家，曾捍卫过休伯曼的精神分裂症患者眼运动观点的曼德尔，在生理学中混沌的作用问题上走得更远。"混沌这种数学病态可能是健康吗？而数学的健康，即这类结构的可预言性和可微分性，是疾病吗？"曼德尔早在1977年就转向混沌了，当时他发现大脑中某些酶的"特殊行为"只能用非线性数学的新方法来解释。他鼓励用同样的语言研究蛋白质分子的振荡着的三维纠缠；他主张生物学家们应当把这类分子理解成能有相变的动力系统，而不应当描绘静态的结构。他自称是一位狂热者，主要对最混沌的器官感兴趣。他说，"当你在生物学中达到平衡，你就死了。如果我问你的大脑是不是一个平衡系统，我必须做的唯一事情就是请你几分钟之内不要胡思乱想，你自己就知道它不是个平衡系统。"

对曼德尔来说，混沌的发现在治疗精神失常的临床方法方面引起了改变。按照任何客观标准，当代"精神药理学"，即用药物治疗从忧虑和失眠到精神分裂症的一切病症，必须被认为是失败的。如果有病人被治愈过，那也少之又少。精神病症的最激烈表现可以控制， 但是没有人知道长期预后。曼德尔为同事们提供了一个关于最常用药物的令人寒心的估计。治疗精神分裂症的酚噻嗪只使基本失调变得更糟。三环

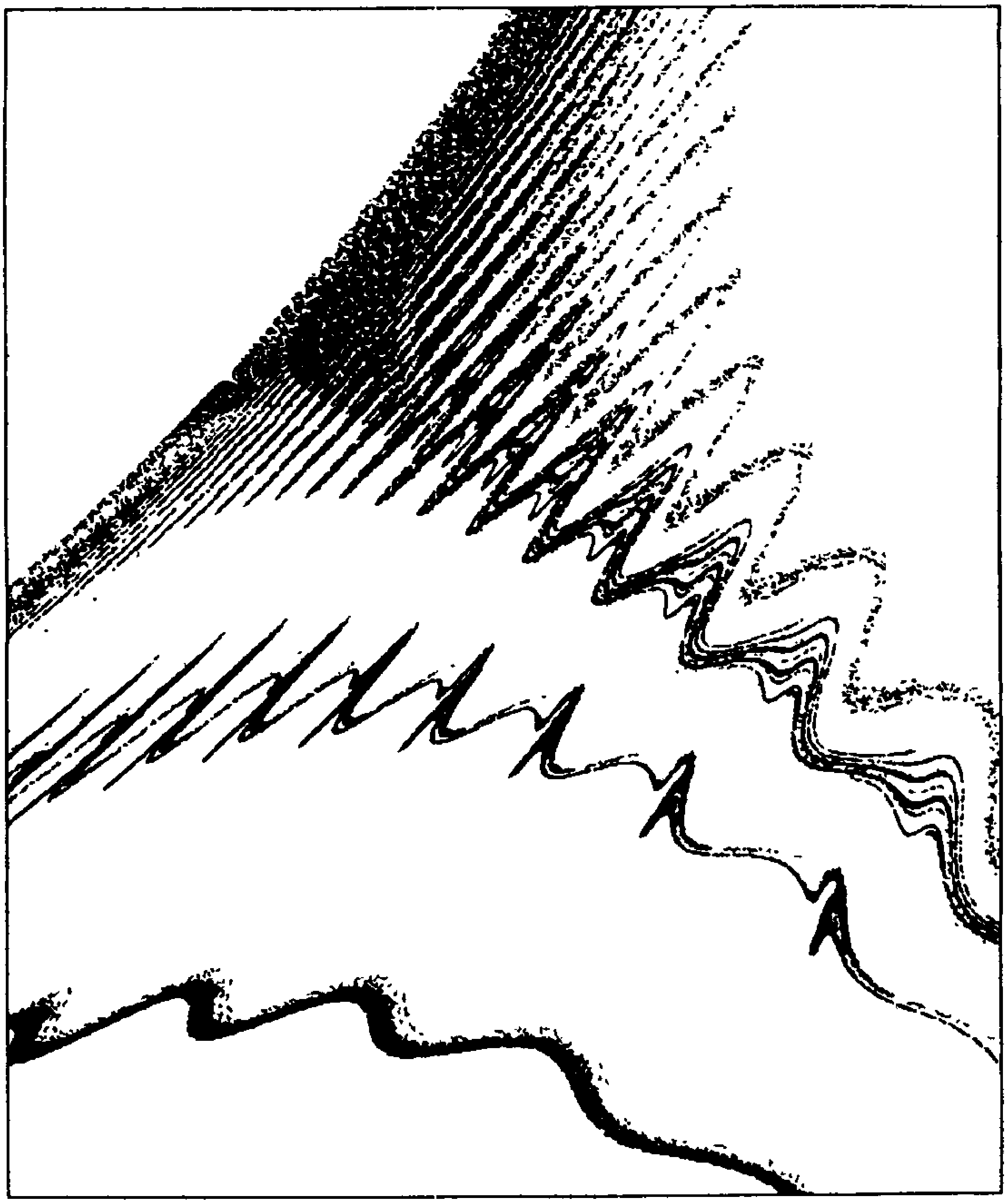


图 11 2 混沌的谐和

像无线电频率或行星轨道这样的不同节律的相互作用，产生一类特殊的混沌。本页和下页上的计算机图形，表示三个节律碰到一起时可能产生的一些“吸引子”。

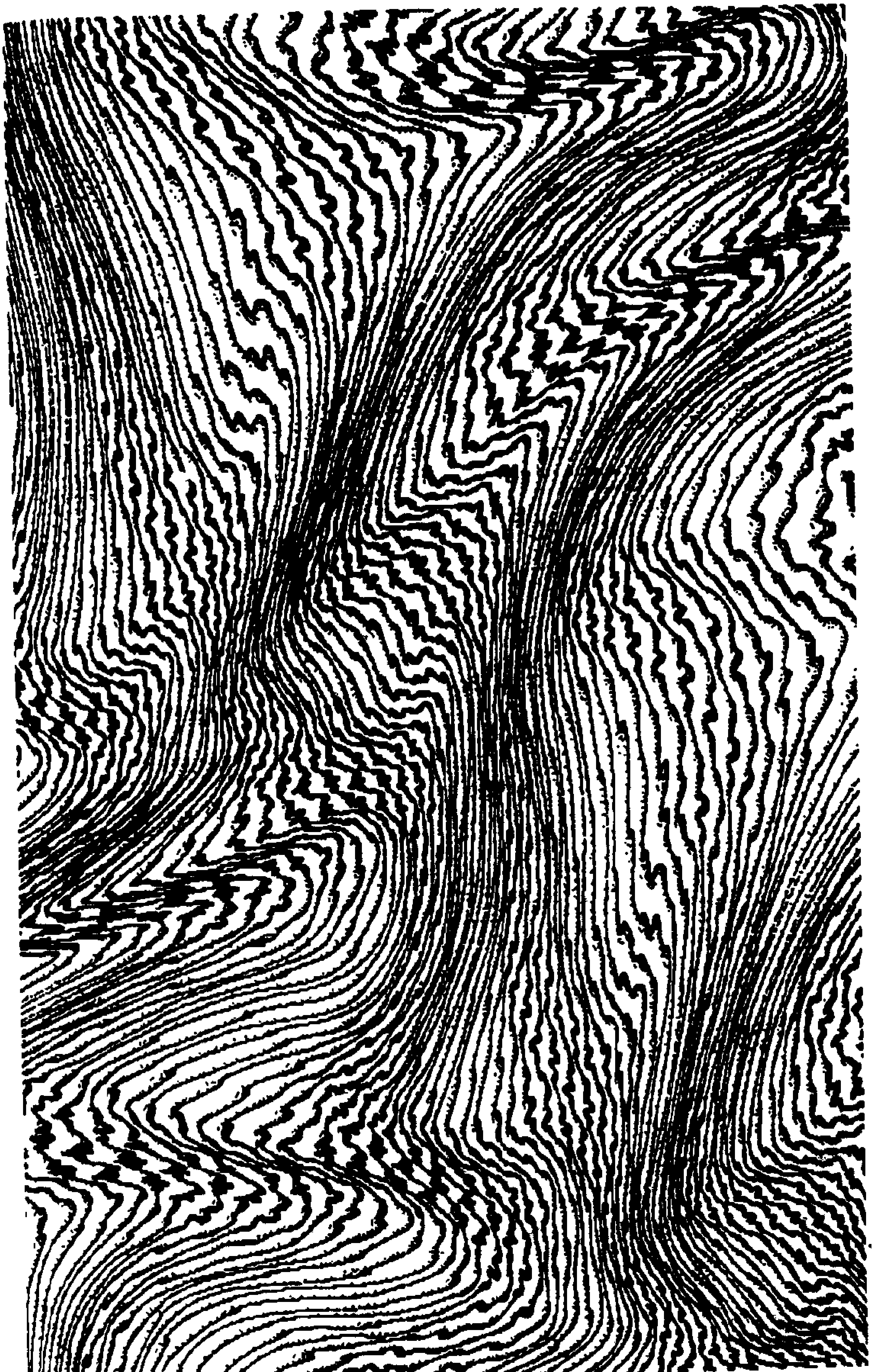




图 11 3　混沌的流

把一根棍子从黏滞流体中划过，产生简单的波浪似的形状。如果划过几次，就产生更复杂的形状。



抗抑郁剂“增加情绪循环的速率，导致心理病态复发次数的长期增加”。如此等等，不一而足。曼德尔说，只有锂有实际的医疗效果，不过只是对于几种失调。

就他所见，这是个概念问题。治疗这台“最不稳定的、动态的无穷维机器”的传统方法，是线性的和约化主义的。“基本范式仍然是：一种基因——→一种肽——→一种酶——→一种神经发送源——→一种接受体——→一种动物行为——→一种临床症状——→一种药物——→一种临床估计尺度。它几乎统治了精神药理学的全部研究和实践。50多种发送源，几千种细胞类型，复杂的电磁现象，在从蛋白质到脑电图的所有层次上基于自治活动的连续不稳定性——即使如此，大脑还是被想象成化学的从点到点的开关板”。对于见识过非线性动力学世界的人，那反应只能是：何其天真！曼德尔敦促他的同事们去了解那维持着像思维这样的复杂系统的流动几何。

许多其他科学家开始把混沌的形式体系应用于人工智能研究。例如，在吸引域之间迷走的系统动力学，诱惑着那些想办法模拟符号与记忆的人们。一位物理学家把“思想”想象成具有模糊边界的区域，它们既分开又交叠，既像磁铁一样拉着跑又可能放开自己走，他自然会转向有“吸引域”的相空间形象。这样的模型看来具有正确的特性：稳定点与不稳定相混合，带有可变边界的区域。它们的分形结构提供了那种无限地自我引用的性质，后者看来对于思维的能力具有中心意义；这里思维的能力是指能产生思想、决定、感情以及意识的所有其他产品。不论有无混沌，严肃的认知科学家们再也不能把思维模拟为静态结构。他们认识到从神经元往上的尺度阶梯，它提供了微观尺度与宏观尺度相互作用的可

能性，而这一切又是湍流和其他复杂动态过程的特征。

模式是从无形中产生的：这是生物学的基本美和基本奥秘。生命从无序的海洋中吸取有序。薛定谔这位量子先驱，曾闯入生物学作过外行思索的几位物理学家之一，在 40 年前就提出，活的生物体具有“令人惊异的天赋把‘有序流’集中于自身，这样才避免衰变为原子混沌”。对于薛定谔这位物理学家，生命物质的结构不同于他的同事们研究的那些物质乃是清楚明白的。生命的结构单位——那时还不叫 DNA——是一种非周期晶体。“在物理学中，我们迄今只和周期晶体打过交道。对于一位谦卑的物理学家的头脑，这些是很有趣和复杂的对象；它们组成了最迷人和复杂的材料结构之一，这是无生命的自然用来考验理智的难题。然而，同非周期晶体比起来，它们是相当平淡和呆板的”。它们的差别有如墙纸和挂毯，有如简单花样的规则重复和艺术家创作中的丰富而有条理的变化。物理学家们只学会了理解墙纸。他们对生物学的贡献如此之少，也就毫不奇怪了。

薛定谔的观点是不平常的。生命既有序又复杂，这是老生常谈；把非周期性看作特殊性质的来源就近乎神秘了。在薛定谔的时代，无论数学还是物理学都不能为这种思想提供真正的支持。没有工具可用来把不规则性作为生命的构成单元加以分析。现在这样的工具有了。

12 混沌及其他

“混沌要素的分类，只此而已。”

——麦尔维尔：《白鲸》

新的信念，新的定义

20年前洛伦兹在思考大气，埃侬在思考星星，梅在思考自然界中的均衡。曼德勃罗是国际商用机器公司的一位不知名的数学家，费根鲍姆是纽约市立大学的本科生，法默是在新墨西哥长大的男孩。大多数实干的科学家对于复杂性有一套共同信念。他们对这深信不疑，因而也无需诉诸笔墨。只是后来才有可能说出这是些什么信念并且加以检验。

“简单系统行为简单。”像摆这样的机械玩意儿，一个小电路，池塘里理想化的鱼群——只要这些系统可以归结为一些完全明白、完全确定的规律，它们的长时间行为就是稳定的和可预言的。

“复杂行为意味着复杂的原因。”机械设备、电路、野生

种群、流体流动、生物器官、粒子束、大气风暴、国民经济——眼见是不稳定、不可预言或是失控的系统，必定或者由许多独立的组元统治着，或者受到外界的随机影响。

“不同系统的行为也不同。”神经生物学家终生研究人类神经元的化学而不学习任何有关记忆或感知的知识，飞机设计师用风洞解决空气动力学问题而不懂湍流的数学，经济学家分析购物心理而不会预报大范围的趋势——像这样的科学家们，知道自己学科里的各种组元是不同的，就当然地认为由几十亿这样的组元构成的复杂系统必定是不同的。

然而，现在一切全变了。在这20年间，物理学家、数学家、生物学家和天文学家们创立了另外一套思想。简单系统产生出复杂行为。复杂系统产生出简单行为。最重要的是有关复杂性的定律具有普适性，而与构成系统的组元的细节完全无关。

对于大多数实干的科学家——粒子物理学家、或者神经学家、或者甚至数学家，这种变化并没有马上发生作用。他们继续在自己学科的范围内研究问题。但是他们知道有某种叫做混沌的东西。他们知道有些复杂现象已经得到解释，而且知道一些别的现象忽然看来需要新解释了。无论是在实验室里研究化学反应，或是在三年野外考察中追踪昆虫种群，还是在模拟海洋温度变化，科学家们都不能再用传统的“置之不理”的办法来对待出乎意料的涨落或振荡的出现。对于某些人，这是添麻烦。另一方面，他们从实用主义的角度知道，以这门模糊的数学类科学的名义，可以从联邦政府和公司研究机构拿到钱。他们之中越来越多的人认识到，混沌提供了处理老数据的新鲜途径，这些数据由于过分杂乱而被遗忘在

抽屉中了。越来越多的人感觉到科学的划分成为工作中的障碍。越来越多的人感到与整体分割开来研究各个部分是枉费心机。对他们来说，混沌是科学中约化主义计划的终结。

不理解；反对；生气；接受。长期推动混沌的人们领教过所有这些。佐治亚州理工学院的福特记得70年代有一次为一群热力学人士作报告，提到了达芬方程中有混沌行为，这个方程是教科书中一个熟知的、关于受到摩擦的简单振子的模型。对福特来说，达芬方程中出现混沌是件新奇事——这只是他知道的这类真事之一，那是在《物理评论通信》发表文章前好几年。他同样可以在古生物学家的会议上说恐龙有羽毛。他们知道得更清楚。

“我什么时候说过那样的话？我的上帝，听众开始暴跳。那简直是，‘我爹玩过达芬方程，我爷爷玩过达芬方程，什么人也没有见过你说的那种事。’你当然可以碰上对自然界是复杂的这一概念的反对。然而我不明白的是那种敌意。”

福特舒服地坐在他的亚特兰大办公室里，室外冬天的太阳正在落下去，他从一只用鲜艳色彩写着“混沌”一词的特大杯子里呷了一口饮料。他的年轻些的同事福克斯正在讲述自己的转变，那是在为儿子买了一台苹果Ⅱ计算机之后不久，当时一位自尊的物理学家是不会买这么个东西来干工作的。福克斯听说费根鲍姆发现了指导反馈函数行为的普适律，决定写一个简短程序以便在苹果机的显示屏上看看这种行为。他看见一切全画在屏上了——叉子分岔，稳定的线劈裂为2，然后是4和8；混沌本身的出现；混沌之内又有惊人的几何规则性。福克斯说，“几天之内你就可以把费根鲍姆的事全部重做一遍。”计算机自学说服了他自己和其他可能会怀疑写在纸

上的论据的一些人。

一些科学家玩了玩这些程序就适可而止了。另外一些人却因此改变了观点。福克斯是仍然清楚地意识到标准线性科学的局限性的人物之一。他知道自己曾经习惯性地把艰难的非线性问题放在一边。在实践中一位物理学家总会发表如下的议论来了结:“这个问题要我去查特殊函数手册,这是我愿做的最后一件事。我绝对不会上机器去做它,我对那事太有经验了。”

福克斯说.“非线性的一般图象引起了许多人的注意——最初很慢,但越来越快。每个瞧过它的人都有所收获。不论你是干什么科学的,你现在再去看一下过去看过的任何问题。总有那么一处你停止了研究,因为它成了非线性的。现在你知道该怎么办,于是你又回去干了。”

福特说,“如果一个领域开始扩大,那必定是因为有一些人觉得可以从中有所获——如果他们改变自己的研究,所得报偿可能很大。对我来说,混沌像一场梦。它提供了这样的可能性:如果你过来玩这场游戏,你就可能撞上矿产丰富的母脉。”

然而,大家对这个词本身的意见还不十分一致。

霍姆,一位从康奈尔经过牛津来的白胡子数学家和诗人:“一定的(通常是低维的)动力系统的复杂的、非周期的吸引轨道。”

郝柏林,一位中国物理学家,他曾经把有关混沌的许多历史性论文汇集成单卷参考书:《一类没有周期性的序》。以及:“一个迅速发展的研究领域,数学家、物理学家、流体动力学家、生态学家和其他许多人都为之作出过重要贡献。”还

有：“一类新近才得到承认的无往而不在的自然现象。”

斯图尔特，在长岛的布鲁克海文国家实验室的一位应用数学家：“在简单的决定论（类似钟表）的系统中的表观随机的循环行为。”

耶鲁大学的詹森，一位探索量子混沌可能性的理论物理学家：“决定论的非线性动力系统的不规则的、不可预言的行为。”

圣克鲁斯集体里的克拉奇菲尔德：“具有正而有限的测度熵的动力学。从数学译出来是：产生信息（把小的不确定性放大）但并非彻底地不可预言的行为。”

还有福特，这位自封的混沌传教士：“终于从有序和可预言性的枷锁中解脱出来的动力学……。被解放出来随机地探索它们的一切动态可能性的系统……。令人激动的多样性，富裕的选择，丰饶的机会。”

哈伯德，在研究迭代函数和曼德勃罗集的无穷分形原野时，认为混沌不是文章的好题目，因为它意味着随机性。对他来说，压倒一切的消息是自然界的简单过程可以产生宏伟的复杂性大厦而不需随机性。为了对与人类大脑同样丰富的结构进行编码和阐释，所需的全部工具都在非线性和反馈之中。

对于像温弗里这样的探索生物系统整体拓扑的其他科学家，混沌是一个过分狭窄的名字。它意味着简单系统，费根鲍姆的一维映象，以及茹厄勒的二维或三维（和分维）的奇怪吸引子。温弗里感到，低维混沌是一种特殊情况。他关心的是多维复杂性的规律——而他确信存在这些规律。宇宙还有太多的部分看来在低维混沌的范围之外。

《自然》杂志开展了关于地球气候是否遵从一个奇怪吸引子的争论。经济学家们在股市趋势里寻找可以识别的奇怪吸引子，但至今尚未找到。动力学家们希望用混沌工具去解释完全发达的湍流。现在在芝加哥大学的利布沙伯把他的精巧实验风格转向为湍流服务，造出了比他1977年的小腔大几千倍的液氦盒。谁也不知道这类在时空两方面释放出流体无序的实验会不会找到简单的吸引子。正如物理学家休伯曼所说，"如果有一条湍急的河流，你放进了个探测器并且说，'瞧，这儿有一个低维奇怪吸引子，'那我们大家都会摘下帽子看的。"

混沌是这样一种思想，它使所有这些科学家们信服大家都是同一个合资企业的成员。物理学家或生物学家或数学家，他们相信简单的决定论的系统可以滋生复杂性；相信对传统数学来说过于复杂的系统仍然可能遵从简单规律；还有，不论他们的特殊领域如何，相信大家的任务都是去了解复杂性本身。

第二定律、雪花之谜和灌铅骰子

加亚假说的作者拉夫洛克写道，"让我们再次看看热力学定律。确实，初看起来它们像但丁地狱门口的告示……"①

但是第二定律是来自科学的一个坏技术消息，它已经在非科学圈子里牢固地确立。任何东西都趋向无序。任何把能

① 意大利诗人但丁的《神曲》中，描述地狱门口写着"这里必须根绝一切犹豫；这里任何怯懦都无济于事。"——译者

量从一种形式转化为另一种形式的过程都必须将一些能量作为热损失掉。完美的效率是不可能的。宇宙是单行道。在宇宙中以及在其中任何假设的独立系统里，熵必须永远增大。不管怎么表述，第二定律都是一个不留情面的法则。在热力学中真是如此。然而在远离科学的知识王国里，第二定律还有自己的生命力，社会分裂、经济衰退、世风日下以及各式各样的颓废话题全算到了它的名下。第二定律的这些次要的隐喻式的化身，现在看来是特别错误的。在我们的世界里，复杂性繁荣兴旺，那些想从科学找到对大自然的习惯的一般理解的人们，最好借助混沌的定律。

不知为什么，当宇宙向着它那在具有最大熵的毫无特色的热库中的最终平衡衰退时，它终究设法产生了有意思的结构。关心热力学作用的勤于思考的物理学家意识到下面这个恼人的问题:“无目的的能量流怎样把生命和意识带进了这个世界。”与这种烦恼搅在一起的还有那难以捉摸的熵的概念，它为了热力学目的而通过热和温度得到了合理的良好定义，但它却非常难以用来作为无序的度量。水在转化成冰时失去能量而形成晶体结构，物理学家们在测量水的有序程度时是伤透脑筋的。但是热力学熵绝不能用作氨基酸、微生物、自再生动植物和像大脑这样的复杂信息系统生成过程中有形和无形的变化程度的度量。当然，这些演化中的有序岛屿也必须遵从第二定律。因此，那重要的定律、创造性的定律只能存在于别的地方。

自然界形成模式。有些模式在空间有序但随时间无序，另一些对时间有序但在空间无序。某些模式是分形，表现出不同尺度上自相似的结构。另一些导致定态或振荡状态。模式

的形成已经成为物理学和材料科学的一支，它允许科学家们模拟粒子如何聚集成团，放电如何分形传播，以及冰和金属合金中晶体如何生长。模式形成的动力学看来是很基本的——形状随空间和时间变化，然而只是现在才有了理解它们的工具。“为什么所有的雪花都是不同的?”——现在，这是对物理学家们提出的合理问题。

冰晶在湍流空气中形成，同时对称和机遇显著地混合，形成那不很确定的特别美妙的六角形。当水冻结时，晶体伸出小尖来；尖端长大，它们的边界变得不稳定，新的小尖从边上冒出来。雪花遵从令人惊异地微妙的数学定律；不可能精确地预言一个小尖会长得多快，它会有多窄，以及它如何经常地分枝。几代科学家描绘和分类过那多姿多态的模式：板片和柱体，晶体和多晶，针形和树枝。由于没有更好的办法，专题论文都把晶体形成看成分类问题。

现在知道，这些尖端和树枝的生长是高度非线性的不稳定自由边界问题，意思是这些模型必须跟踪复杂的、扭动的、动态变化着的边界。当固化过程由外向内进行时，就像在冰盘里那样，边界通常是稳定和光滑的，固化速度取决于外壁带走热量的本领。但是，当晶体由初始的子晶向外固化时，就像雪花生长一样，它必须抓取那些从潮湿空气中落下来的水分子，过程就变得不稳定。边界上任何一小片，只要走在邻居前面一点，就获得抓住新的水分子的优势，因此长得稍快——“避雷针效应”。形成新的分支，然后是新的子分支。

有一条困难在于决定所涉及的众多物理力中哪些是重要的，而哪些可以忽略。科学家们早就知道，最重要的是水冻结时释放的热如何扩散。但是热扩散的物理不能完全解释研



图 12 1　分支和成团

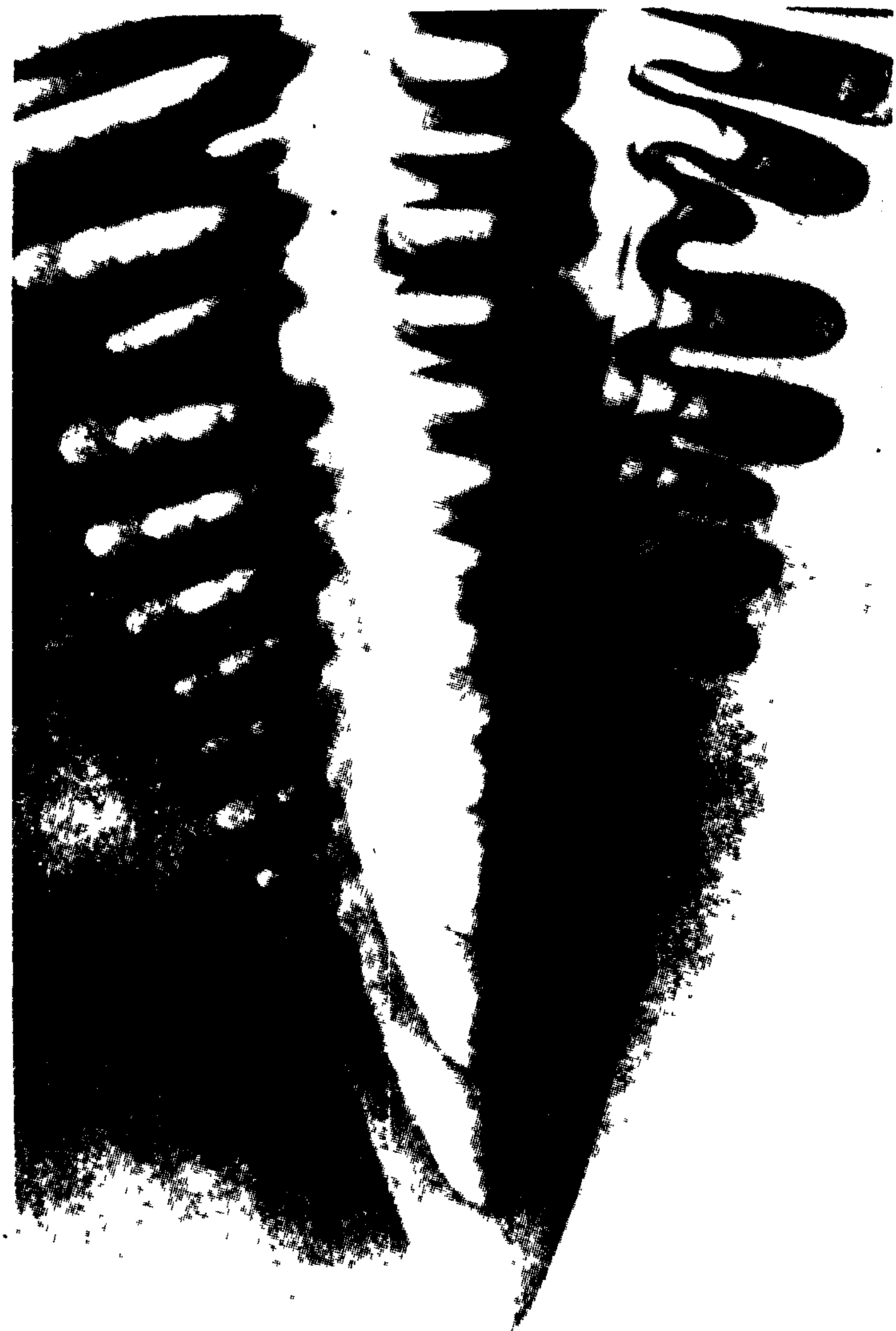
模式形成过程的研究，受到分形数学的推动，它把闪电似的放电径迹和模拟的随机运动粒子的聚集（小插图）这些自然模式归为一类。

究者们在显微镜下观察雪花或在实验室中使它们生长时所看到的模式。最近科学家们找到了结合另一种过程即表面张力的办法。新的雪花模型的核心也是混沌的实质：在稳定力和不稳定力之间的精巧平衡；原子尺度上的力与日常生活尺度上的力之间的强大相互作用。

在热扩散倾向于造成不稳定的地方，表面张力造成稳定。表面张力的拉引使物质更喜欢光滑的边界，就像肥皂泡的壁一样。形成粗糙表面要花费能量。两种趋势的平衡依赖于晶体的大小。扩散主要是大尺度的宏观过程，而表面张力则在微观尺度上最强。

由于表面张力的效应很小，传统上研究人员假定在实际计算中可以略去。事实并不如此。最小的尺度也是关键性的；这里表面张力对正在固化的物质的分子结构无限敏感。在冰的情形中，自然的分子对称导致 6 个生长方向的内在优先。科学家们吃惊地发现，稳定性和不稳定性的混合可以放大这种微观优先，导致形成雪花的几乎分形的花边结构。这种数学不是来自大气科学家而是来自理论物理学家和冶金学家，他们对这一问题是有自己的兴趣的。在金属中，分子的对称性有所不同，因而特征性的晶体也不同，而这有助于决定合金的强度。但是数学是一样的：模式形成的规律是普适的。

对初始条件的敏感依赖性的作用不是破坏，而是创造。典型的正在生长的雪花飘落地面时，要在风中飘浮一个多小时，



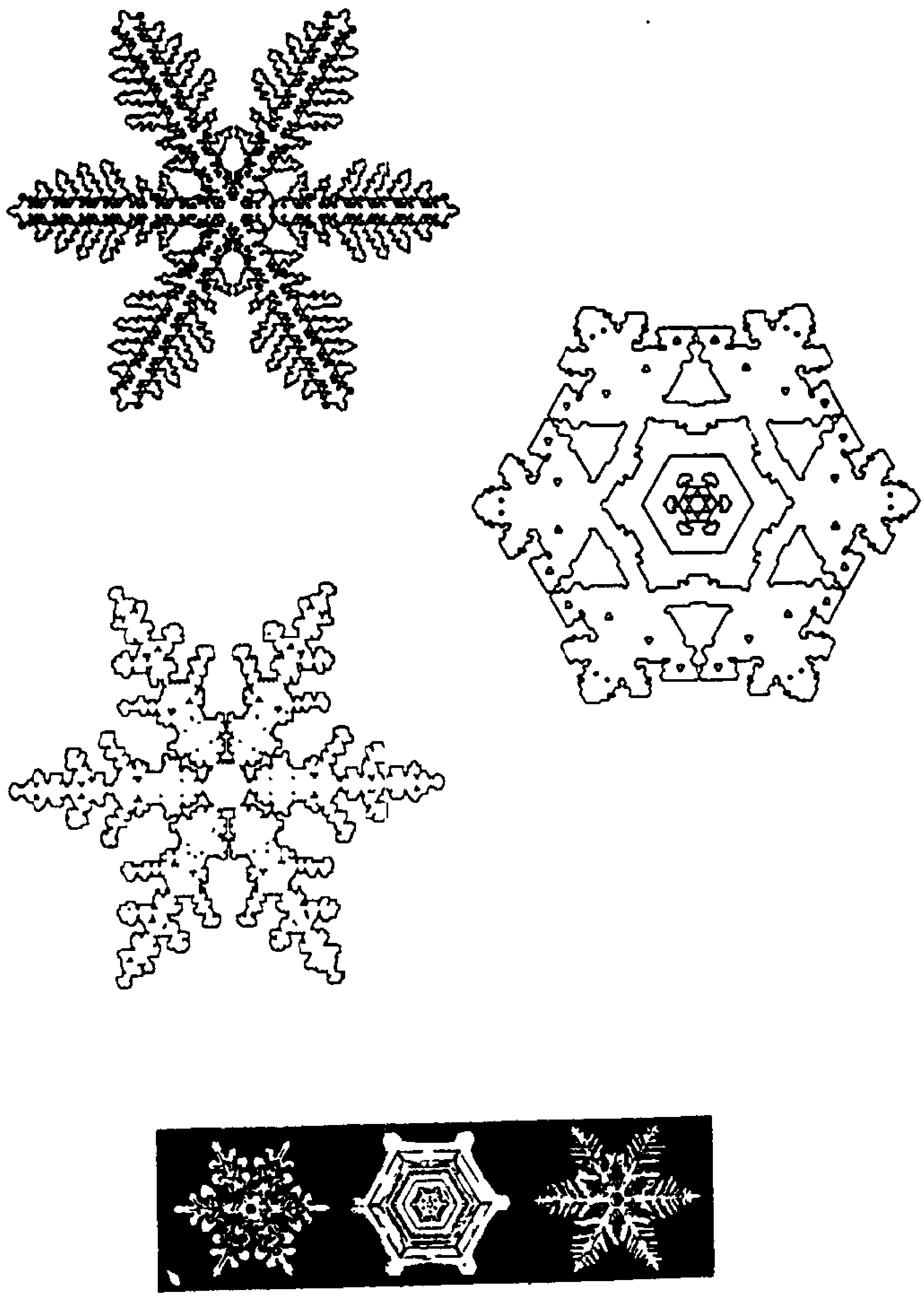


图 12 2　使稳定性和不稳定性相抵

当液体结晶时，它形成一个生长尖（上页图所示多次曝光的照片），边界成为不稳定的并向外伸出边枝。这些精巧热力学过程的计算机模拟很像实际的雪花（本页图）。

任何时刻分支的小尖所作选择敏感地依赖于温度、湿度以及大气中的杂质。单个雪花的6个小尖，展开在约1毫米的空间，感受到相同的温度，加之生长规律又是纯决定论的，因此它们可以保持近乎完美的对称。然而湍流空气的性质使得任何一对雪花都会经历非常不同的路程。最终的雪花记录了它所经历的全部变化多端的天气条件的历史，而这种种组合有无穷多花样。

物理学家们喜欢说，雪花是非平衡现象。它们是能量从自然界中一部分流向另一部分时的不均衡的产物。这种流使边界变成小尖，使小尖变成一排分支，而这一排分支又变成从未见过的复杂结构。当科学家们发现这样的不稳定性遵从混沌的普适规律后，他们成功地把同样的方法用于大量物理和化学问题，而且他们不可避免地想到生物学是下一轮对象。当观看计算机模拟的分支生长时，他们思想深处看到的是水藻、细胞壁、生物体萌芽和分裂。

现在，许多条从微观粒子到日常生活中复杂性的路径已经开放。在数学物理中，费根鲍姆及其同事们的分岔理论在美国和欧洲都在前进。在理论物理学的抽象区域里，科学家们探索着其他新的课题，例如目前尚悬而未决的量子混沌问题：量子力学允许有经典力学的混沌现象吗？为了研究运动流体，利布沙伯建造了他的巨大的液氦盒，而霍恩堡和阿勒斯在研究对流中奇形怪状的行波。在天文学中，混沌专家们应用意料之外的引力不稳定性来解释陨星的来源——小行星从火星以外很远处似乎无法解释地被弹射过来。科学家们使用动力系统的物理来研究人类免疫系统，而这里有几十亿元

件，有学习、记忆和模式识别的能力，他们同时在研究演化过程，希望发现普适的适应机制。建立这些模型的人，很快就看到能够复制自身、竞争、并按自然选择演化的各种结构。

福特说，"演化就是混沌加反馈。"是的，宇宙随机和耗散，但是定向的随机性可以产生惊人的复杂性。而且正如洛伦兹很久以前所发现的，耗散是有序的动因。

福特对爱因斯坦的著名问题的回答是，"上帝同宇宙掷骰子，但它们是灌了铅的骰子。而现在物理学的主要目的就是要找出它们是按什么规则灌铅的，我们如何能利用它们。"

机会和必然

这些思想有助于激励科学的集体事业向前发展。然而从来没有一种哲学、一种证明、一种实验看来足以动摇那个别的研究者，他们总是认为科学首先应当提供一种工作方法。在有些实验室里，传统的方法已经步履蹒跚。正如库恩所说，正常的科学已经走入歧途；一台设备不能给出预期的结果；"我们这行业再也不能回避反常了。"对于任何一个科学家来说，在混沌的方法成为必然之前，混沌的思想是不可能奏效的。

每个领域都有自己的例子。在生态学里有个谢弗，他是50年代和60年代本领域的老前辈麦克阿瑟的最后一位学生。麦克阿瑟提出了一种自然观念，它为自然均衡思想奠定坚实基础。它的模型假设平衡总是存在的，而动植物种群总是离平衡不远。对于麦克阿瑟来说，自然界的均衡几乎有一种道义性质，他的模型的平衡态保证了最有效地利用食物资

源和最低的浪费。如果令这样的自然界悠然自在，那真是天下太平。

20 年后，麦克阿瑟的最后一位学生发现自己意识到基于平衡思想的生态学看来注定要失败。传统的模型由于线性偏向而失效。自然界更为复杂。相反地，他认为混沌“既令人兴奋又有所威胁”。他告诉同事们，混沌可能破坏生态学的最经久的假定。“现在被认为是生态学中的基本概念的，正像狂烈风暴——在这情形中是一场完全的非线性风暴——之前的雾。”

谢弗利用奇怪吸引子来研究诸如麻疹和水痘这类小儿疾病的流行病学。他先是从纽约城和巴尔的摩，后来从阿伯丁、苏格兰以及整个英格兰和威尔士搜集数据。他建立了一个动力学模型，像个阻尼驱动摆。疾病每年受到回校学生中传染性散布的驱动，而被天然抵抗力阻尼。谢弗的模型对这些疾病预言了极为不同的行为。水痘的变化应是周期的。麻疹的变化应是混沌的。而数据恰好与谢弗的预言完全一致。在传统的流行病专家看来，麻疹的年度变化是无法解释的——随机而且带干扰。谢弗利用相空间重构技术，表明麻疹遵从奇怪吸引子，它的分维大约是 2 5。

谢弗还计算了李雅普诺夫指数，画了庞加莱映象。他说，“更确切地说，如果你瞧瞧那些图，它自己就会跳出来。你会说，‘我的上帝，就是这回事。’”虽然吸引子是混沌的，但由于模型本身的决定论性质，倒有了某种可预言性。麻疹高传染率的年度之后是暴跌。而中等传染率的年度之后，发病水平只有小小的变化。传染率低的年度带来了最大的不可预言性。谢弗的模型还预言了群众性接种计划对动力学的阻尼后

果——标准的流行病学不能预言的后果。

在集体尺度和个人尺度上，混沌的思想用不同的方式并由于不同的原因而前进着。对谢弗以及其他许多人而言，从传统科学到混沌的转变是意外地到来的。他曾是梅1975年呼吁文章的理想“传教”对象，但他读过文章就丢下了。他觉得对于实干的生态学家要研究的那类系统，梅的数学思想是不现实的。奇怪的是，他是因为对生态学知道得太多，才未能欣赏梅的观点。他当时想，这是些一维映象，它们对于连续变化的系统能有什么关系呢？于是当一位同事劝他“读读洛伦兹”时，他把引文记到一张纸片上就再也没有去读它。

几年之后，谢弗住在亚利桑那州图森市的靠近沙漠的郊外。每当夏天他就到北面不远的圣卡塔利娜山中去，当山脚沙漠被烘烤时，山上的灌木丛也是很热的。在春天开花季节之后、夏雨到来之前的六七月间，谢弗和他的研究生们在树丛中追踪各种蜂和花朵。虽然有年度变化，这个生态系统很容易测量。谢弗数出每一根茎上的蜂数，用小吸管测量花粉，然后对数据作数学分析。野蜂和蜜蜂竞争，蜜蜂和大黄蜂竞争，而谢弗建立令人信服的模型来解释种群涨落。

到1980年，他明白出了点什么问题。他的模型失效了。原来，主角是他忽略了的一个物种：蚂蚁。有些同事怀疑冬天天气反常，有人又说是夏天天气反常。谢弗考虑增加变量使模型复杂化。但是他极为失望。研究生们抱怨说夏天跟着谢弗去爬5,000英尺的山真是太苦了。然而接着事情就起了变化。

他偶然看到一篇关于某个复杂实验中化学混沌的预印本，他感到那些作者们经历了同自己一样的问题：不可能监

视一个容器中几十种不断涨落的反应产物，正如不可能监视亚利桑那山中的几十个物种。然而在他失败处别人却成功了。他读了如何重构相空间。他最后读了洛伦兹、约克和其他一些人的文章。亚利桑那大学资助了题为“混沌中的有序”的系列讲演。斯文尼来了，他知道如何讲实验。他解释了化学混沌，演示了一个奇怪吸引子的透明片，并说“这是实际数据”，谢弗脊背上打了个寒颤。

谢弗说，“我恍然大悟，这是命中注定。”正好将有一年学术休假。他撤回了向国家科学基金会申请的资助，而去申请了古根海默研究职位。他知道，那边山上蚂蚁种群随季节变化。蜜蜂在飞翔，并带着动力学的嗡嗡声突进。云彩从天空中滑过。他再也不能按旧的方式工作了。

参考文献

下面按章给出原书附录中开列的全部有明确出处的参考文献。作者、书刊名称和文章题目都没有译出，以便读者到图书馆检索查目。1—6 是综合性的文献：

1 D R Hofstadter , Scientific American , November 1 9 8 1 ; 重印在 Metamagical Themas(Basic Books, 1985)书中。

2 Hao Bai-lin 编, Chaos(World Scientific, 1984)。

3 P Cvitanovic 编, Universality in Chaos(Adam Hilger, 1984)。

4 B B Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature(Freeman, 1977)

5 H -O Peitgen and P H Richter , The Beauty of Fractals (Springer - Verlag, 1986)

6. H B Stewart and J M Thompson , Nonlinear Dynamics and Chaos (Wiley, 1986)

1 序曲

7 F K Browand, "The structure of the turbulent mixing layer", Physica, 18D(1986), 135

8 T Musha and H Higuchi , " The 1 / f fluctuation of a traffic current on an expressway", Japanese Journal of Applied Physics (1976) ,

1271.
9. A. M. Saperstein, "Chaos—a model for the outbreak of war" , Nature, 309 (1984), 303
10. J. Ford, "What is chaos? That we should be mindful of it? " 在 S. Capelin 和 P. C. W. Devies 编的 The New Physics (Cambridge University Press,1986)书中。
11. J. Boslough, Stephen Hawking' s Universe (Cambridge University Press, 1980) .
12. R. Shaw, The Dripping Faucet as a Model Chaotic System (Aerial, 1984) .

2 蝴蝶效应

13. E. N. Lorenz,"Deterministic nonperiodic flow",Journal of the Atmospheric Sciences, 20 (1963) 130.
14. E. N. Lorenz,"The mechanics of vacillation",同上,20(1963),448。
15. E. N. Lorenz, "The problem of deducing the climate from the governing equations", Tellus, 16 (1964), 1.
16. E. N. Lorenz, "On the prevalence of aperiodicity in simple systems", Lecture Notes in Mathematics. 755 (1979), 53.
17. E. N. Lorenz, "Large-scale motions of the atmosphere: circulation", 在 P. M. Hurley 编 Advances in Earth Science (The MIT Press, 1966) 书中
18. L. F. Richardson, Weather Prediction by Numerical Process (Cambridge University Press, 1922) .
19. E. N. Lorenz, "Irregularity: a fundamental property of the atmosphere", Tellus, 36A (1984), 98.
20. P. S. de Laplace, A Philosophical Essay on Probabilities (Dover, 1951) .
21. H. Poincaré, Science and Method.
22. The New York Times, 9 September 1963, 发表过对于天气预报的乐观估计
23. N. Wiener, "Nonlinear prediction and dynamics", 在 P. Masani 编的

全集(The MIT Press, 1981)第3卷
24. J. von Neumann, "Recent theories of turbulence",在 A. H. Taub 编的全集(Pergamon Press, 1963)第6卷。
25. E. N. Lorenz, "The predictability of hydrodynamic flow", Trans. New York Academy of Sciences II: 25·4 (1963), 409.
26. B. Saltzman, "Finite amplitude convection as an initial value problem", Journal of the Atmospheric Sciences, 19 (1962), 329.
27. K. A. Robbins, "A moment equation description of magnetic reversals in the earth", Proceedings of the National Academy of Science 73 (1976), 4297.
28. C. Sparrow, The Lorenz Equations, Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors (Springer-Verlag, 1982).

3 革命

29. T. S. Kuhn, The Structure of Scientific Revolutions (University of Chicago Press, 1970, 2nd Ed.).
30. T. S. Kuhn, The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change (University of Chicago Press, 1977).
31. I. B. Cohen, Revolution in Science (Belknap Press, 1985).
32. J. Ford, "Chaos: solving the unsolvable, predicting the unpredictable", 在 M. F. Barnsley 和 S. G. Demko 编的 Chaotic Dynamics and Fractals (Academic Press, 1985) 书中
33. M. Berry, "The unpredictable bouncing rotator: a chaology tutorial machine" 在 S. Diner, D. Fargue 和 G. Lochak 编的 Dynamical Systems. A Renewal of Mechanism. Centennial of G. D. Birkhoff (World Scientific, 1986) 书中。
34. J. Crutchfield, M. Nauenberg and J. Rudnick, "Scaling for external noise at the onset of chaos", Physical Review Letters, 46 (1981), 933.
35. A. Wolf, "Simplicity and universality in the transition to chaos", Nature, 305 (1983), 182
36. Galileo Opere VIII: 277; VIII: 129.
37. D. Tritton, "Chaos in the swing of a pendulum", New Scientist, 24 July